

Logarithmes

1 Logarithmes

Définition. Le **logarithme** en base b d'un nombre est l'exposant E devant être mis à b pour obtenir une puissance P donnée :

$$\log_b(P) = E \iff b^E = P.$$

La base b est toujours un nombre positif : $b > 0$.

Exemple 1.

$$\log_2(8) = 3 \text{ car } 2^3 = 8$$

$$\log_5(25) = 2 \text{ car } 5^2 = 25$$

$$\log_3(81) = 4 \text{ car } 3^4 = 81$$

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ car } 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right) = -\frac{3}{2} \text{ car } 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

Question 1

Vérifier les égalités suivantes à l'aide de la définition de logarithme.

a) $\log_{10}(100) = 2$

c) $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$

b) $\log_3(9) = 2$

d) $\log_5(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$

Question 2

Évaluer les logarithmes suivants.

a) $\log_{10}(10000)$

c) $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$

b) $\log_3(27)$

d) $\log_5(\sqrt[3]{5})$

2 Propriétés des logarithmes

2.1 Logarithme de l'unité

Proposition 1. Le logarithme de l'unité est zéro pour n'importe quelle base b :

$$\log_b(1) = 0.$$

Pourquoi ? Parce que $b^0 = 1$

2.2 Logarithmes et puissances de même base

Proposition 2.

$$\log_b(b^E) = E \quad b^{\log_b(P)} = P$$

Exemple 2.

$$\log_2(2^7) = 7$$

$$\text{car } 2^7 = 2^7$$

$$2^{\log_2(3)} = 3$$

$$\text{car } \log_2(3) = \log_2(3)$$

$$\log_5\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{car } 5^{1/2} = 5^{1/2}$$

$$5^{\log_5(\pi)} = \pi$$

$$\text{car } \log_5(\pi) = \log_5(\pi)$$

Question 3

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\log_{10}(10^x)$

c) $10^{\log_{10}(2)}$

b) $\log_3\left(3^{\sqrt{2}}\right)$

d) $2^{\log_2(\sqrt{2})}$

2.3 Logarithme d'un produit

Proposition 3. Les logarithmes transforment les produits en sommes.

$$\log_b(P \cdot Q) = \log_b(P) + \log_b(Q)$$

Exemple 3.

$$\log_2(8 \cdot 16) = \log_2(8) + \log_2(16) = 3 + 4 = 7$$

$$\log_2(2\sqrt{2}) = \log_2(2) + \log_2(\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Question 4

Simplifier les expressions suivantes à l'aide de la dernière propriété des logarithmes.

a) $\log_{10}(100\sqrt{10})$

b) $\log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$

Exemple 4. Les logarithmes ont été initialement créés comme outils de calcul. Comme il est plus simple de calculer une somme que de calculer un produit, on utilisait les logarithmes et les puissances pour transformer le calcul de produits en calcul de sommes. Les valeurs des logarithmes étaient calculés à l'avance et consignés dans des tables de valeurs ou pouvaient être trouvée à l'aide de règles à calcul, donc sans utiliser de calculatrice.

Si par exemple $A = 2.2354$ et $B = 5.3987$ et que l'on veut calculer le produit AB , on peut transformer le produit en somme :

$$\log_{10}(AB) = \log_{10}(A) + \log_{10}(B) = \log_{10}(2.2354) + \log_{10}(5.3987)$$

On peut trouver les valeurs approximative des deux logarithmes dans des tables de logarithmes ou à l'aide de règles à calcul.

$$\log_{10}(2.2354) \approx 0.349355$$

$$\log_{10}(5.3987) \approx 0.732289$$

Le logarithme du produit est donc approximativement la somme des deux logarithmes

$$\begin{aligned} \log_{10}(AB) &\approx \log_{10}(2.2354) + \log_{10}(5.3987) \\ &= 0.349355 + 0.732289 \\ &= 1.081644 \end{aligned}$$

On trouve enfin le produit à l'aide de la définition de logarithme :

$$\log_{10}(AB) \approx 1.081644, \quad \text{donc } 10^{1.081644} = AB$$

La puissance peut elle aussi être calculée à l'aide de table ou de règle à calcul :

$$AB = 10^{1.081644} \approx 12.068242.$$

À titre comparatif, en calculant le produit directement, on trouve

$$AB = 2.2354 \times 5.3987 = 12.06825398.$$

Cette valeur est exacte, mais demande beaucoup plus de calculs ! Essayez de calculer ce produit sans calculatrice et comparer avec le temps nécessaire pour calculer sans calculatrice la somme $0.349355 + 0.732289$.

Question 5

Calculer le produit 3.51398×8.32459 à l'aide de logarithmes en transformant le produit en somme. Ne pas utiliser de calculatrice, vous pouvez utiliser les valeurs utiles parmi les valeurs suivantes :

$$\log_{10}(1.523413) \approx 0.182817$$

$$\log_{10}(3.51398) \approx 0.545799$$

$$\log_{10}(8.32459) \approx 0.920363$$

$$\log_{10}(11.83857) \approx 1.073299$$

$$\log_{10}(29.2524427682) \approx 1.466162$$

$$\log_{10}(29.2524334507365) = 1.466162$$

Question 6

Le tableau suivant donne des valeurs exactes ou approximatives du logarithme à base 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log_{10}(n)$	0	0.301	0.477	A	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	B

Utiliser ce tableau pour donner des réponses approximatives aux questions suivantes.

- Quelle est la valeur de $A = \log_{10}(4)$?
- Quelle est la valeur de B ?
- Donner la valeur approximative de $\log_{10}(30)$.

2.4 Logarithme d'une puissance

Proposition 4.

$$\log_b(B^E) = E \log_b(B)$$

Exemple 5.

$$\log_{10}(2^5) = 5 \log_{10}(2)$$

$$\log_3(2^{-5}) = -5 \log_3(2)$$

$$\log_2(\sqrt{5}) = \log_2(5^{1/2}) = \frac{1}{2} \log_2(5)$$

Exemple 6. On peut utiliser la dernière propriété des logarithmes pour trouver de nouvelles approximations de certains valeurs à partir d'approximations connues. Par exemple, si on sait que $\log_{10}(2) \approx 0.301030$, on peut approximer $\log_{10}(4)$:

$$\begin{aligned} \log_{10}(4) &= \log_{10}(2^2) \\ &= 2 \log_{10}(2) \\ &\approx 2(0.301030) \\ &= 0.602060 \end{aligned}$$

Question 7

Exprimer les logarithmes suivants sans puissances.

$$\text{a) } \log_{10}(5^{1000}) \quad \text{b) } \log_2(10^{45}) \quad \text{c) } \log_3(12^{22})$$

Question 8

Sachant que $\log_2(3) \approx 1.58496$, trouver une approximation des valeurs suivantes.

$$\text{a) } \log_2(9) \quad \text{b) } \log_2\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{c) } \log_2(\sqrt{3})$$

2.5 Changement de bases

Proposition 5. On peut calculer un logarithme en base b à l'aide de logarithmes en base c de la manière suivante :

$$\log_b(A) = \frac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$$

Exemple 7. Exprimons les logarithmes suivants en base 10 :

$$\log_2(3) = \frac{\log_{10}(3)}{\log_{10}(2)}$$

$$\log_5(2) = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(5)}$$

$$\log_7(5) = \frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(7)}$$

Question 9

Transformer les expressions suivantes pour les exprimer à l'aide de logarithmes dans la base donnée. Simplifier le résultat si cela est possible.

- $\log_2(10)$ en base 10
- $\log_3(9)$ en base 10
- $\log_{10}(2)$ en base 5
- $\log_{10}(9)$ en base 3

3 Résumé propriétés des logarithmes

$$(L1) \log_b(b^A) = A$$

$$(L2) b^{\log_b(A)} = A$$

$$(L3) \log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B)$$

$$(L4) \log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b(A) - \log_b(B)$$

$$(L5) \log_b(A^B) = B \log_b(A)$$

$$(L6) \log_b(A) = \frac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$$

Exercices supplémentaires

Question 10

Utiliser la définition de logarithme pour vérifier les égalités suivantes.

- a) $\log_2(8) = 3$
b) $\log_3(81) = 4$
c) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$
d) $\log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1$
e) $\log_{10}(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$
f) $\log_{10}(100000) = 5$
g) $\log_{10}(0,000001) = -5$

Question 11

Transformer les logarithmes suivant sous forme exponentielle et déterminer la valeur de x .

- a) $\log_3(9) = x$
b) $\log_3(81) = x$
c) $\log_2(16) = x$
d) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = x$
e) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = x$
f) $\log_{10}(1000) = x$
g) $\log_5(\sqrt[5]{5}) = x$
h) $\log_{10}(100000) = x$
i) $\log_{10}(10^{1000}) = x$
j) $\log_{10}(1/1000) = x$
k) $\log_{10}(0,000001) = x$
l) $\log_7(\sqrt[3]{7}) = x$
m) $\log_{10}(0,001) = x$

Question 12

Exprimer les logarithmes suivants à l'aide de logarithmes dans la base donnée et simplifier si possible.

- a) $\log_2(10)$ en base 10.
b) $\log(2)$ en base 2.
c) $\log_2\left(\frac{1}{25}\right)$ en base 5.
d) $\log_3(\sqrt{2})$ en base 2.
e) $\log_{\sqrt{5}}(5)$ en base 5.

Question 13

Simplifier les expressions suivantes. Exprimer tout les résultats à l'aide de logarithme à base 10 si nécessaire.

- a) $\log_5(18)$
b) $\log_2(10)$
c) $\log_2(10^{1000})$
d) $\log_{10}(100000 \times 100000)$
e) $\log_{10}(1000000^9)$
f) $\log_{10}(100000) - \log_{10}(10000)$
g) $\log_{10}(10^{12345} 100^{22})$
h) $\log_2(10^4)$
i) $\log_{25}(5)$
j) $\log_9(27)$
k) $\log_{10}(\sqrt{3})$
l) $2\log_2(\sqrt{8})$
m) $5\log_5(\sqrt[5]{5})$
n) $2\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$
o) $2\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{100}}\right) + \log_{10}(100)$
p) $\log_2\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right)$
q) $\log_5\left(\frac{25}{125}\right)$

Question 14

On connaît les propriétés suivantes des logarithmes.

- (L1) $\log_b(b^A) = A$
(L2) $b^{\log_b(A)} = A$
(L3) $\log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B)$
(L4) $\log_b(A^B) = B \log_b(A)$
(L5) $\log_b(A) = \frac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$

Utiliser ces propriétés pour expliquer pourquoi les propriétés suivantes sont vraies. Dire quand vous utiliser une des cinq propriétés connues.

- a) $\log_b\left(\frac{1}{A}\right) = -\log_b(A)$
b) $\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b(A) - \log_b(B)$

Question 15

- a) Déterminer la valeur du produit $2,34 \times 3,12$ à l'aide de l'algorithme usuel de multiplication. Combien d'opération (addition ou multiplication) faut-il effectuer pour faire cette multiplication ?
b) Sachant que $\log(2,34) \approx 0,36921$ et $\log(3,12) \approx 0,49415$ et $\log(7.3008) \approx 0,86336$, déterminer la valeur du produit $2,34 \times 3,12$. Combien d'opérations faut-il effectuer pour faire la multiplication de cette manière ?

Solutions

Question 1

- a) $10^2 = 100$
 b) $3^2 = 9$
 c) $10^{-2} = \frac{1}{100}$
 d) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Question 2

- a) 4 car $10^4 = 10000$
 b) 3 car $3^3 = 27$
 c) -1 car $10^{-1} = \frac{1}{10}$
 d) $\frac{1}{3}$ car $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

Question 3

- a) π
 b) $\sqrt{2}$
 c) 2
 d) $\sqrt{2}$

Question 4

- a) $\log_{10}(100\sqrt{10})$
 $= \log_{10}(100) + \log_{10}(\sqrt{10})$
 $= 2 + \frac{1}{2}$
 $= \frac{5}{2}$
 b) $\log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$
 $= \log_2(\sqrt{2}) + \log_2\left(\frac{1}{8}\right)$
 $= \frac{1}{2} + -3$
 $= \frac{-5}{2}$

Question 5

$$\begin{aligned} \log_{10}(3.51398 \times 8.32459) &= \log_{10}(3.51398) + \log_{10}(8.32459) \\ &= 0.545799 + 0.920363 \\ &= 1.466162 \end{aligned}$$

On a donc que

$$\log_{10}(3.51398 \times 8.32459) = 1.466162.$$

Dans les valeurs données, on voit que

$$\log_{10}(29.2524334507365) = 1.466162$$

et le produit est donc $10^{1.466162} \approx 29.2524334507365 \approx 29.252433$.

Question 6

- a) $\log_{10}(4) = \log_2(2 \cdot 5)$
 $= \log_2(2) + \log_2(5)$
 $\approx 1 + 2.322$
 $= 3.322$
 b) $\log_2(10) = \log_2(2 \cdot 5)$
 $= \log_2(2) + \log_2(5)$
 $\approx 1 + 2.322$
 $= 3.322$
 c) $\log_{10}(30) = \log_{10}(3 \cdot 10)$
 $= \log_{10}(3) + \log_{10}(10)$
 $\approx 0.477 + 1$
 $= 1.477$

Question 7

- a) $1000 \log_{10}(5)$
 b) $45 \log_2(10)$
 c) $22 \log_3(12)$

Question 8

- a) $\log_2(9) = \log_2(3^2)$
 $= 2 \log_2(3)$
 $\approx 2(1.58496)$
 $= 3.16992$
 b) $\log_2\left(\frac{1}{3}\right) = \log_2(3^{-1})$
 $= (-1) \log_2(3)$
 $\approx (-1)(1.58496)$
 $= -1.58496$
 c) $\log_2(\sqrt{3}) = \log_2(3^{1/2})$
 $= \frac{1}{2} \log_2(3)$
 $\approx \frac{1}{2}(1.58496)$
 $= 0.79248$

Question 9

- a) $\frac{\log_{10}(10)}{\log_{10}(2)} = \frac{1}{\log_{10}(2)}$
 b) $\frac{\log_{10}(9)}{\log_{10}(3)}$
 c) $\frac{\log_5(2)}{\log_5(10)}$
 d) $\frac{\log_3(9)}{\log_3(10)} = \frac{2}{\log_3(10)}$

Question 10

- a) $2^3 = 8$
 b) $3^4 = 81$
 c) $2^{-2} = \frac{1}{4}$

- d) $5^{-1} = 1/5$
 e) $10^{1/2} = \sqrt{10}$
 f) $10^5 = 100000$
 g) $10^{-5} = 0,000001$

Question 11

- a) $3^x = 9$, donc $x = 2$
 b) $3^x = 81$, donc $x = 4$
 c) $2^x = 16$, donc $x = 4$
 d) $2^x = \frac{1}{2}$, donc $x = -1$
 e) $5^x = 1/25 = 1/5^2$, donc $x = -2$
 f) $10^x = 1000$, donc $x = 3$
 g) $5^x = \sqrt[5]{5} = 5^{1/5}$, donc $x = 1/5$
 h) $10^x = 100000$, donc $x = 5$
 i) $x = 1000$
 j) $x = -3$
 k) $10^x = 0,000001$, donc $x = -5$
 l) $7^x = \sqrt[7]{7} = 7^{1/7}$, donc $x = 1/7$
 m) $10^x = 0,001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, donc $x = -3$

Question 12

- a) $\log_2(10) = \frac{\log(10)}{\log(2)} = \frac{1}{\log(2)}$
 b) $\log(2) = \frac{\log_3(2)}{\log_3(10)} = \frac{1}{\log_3(10)}$
 c) $\log_2(5) = \frac{\log_5(1/25)}{\log_5(2)}$
 $= \frac{-2}{\log_5(2)}$
 d) $\log_3(\sqrt{2}) = \frac{\log_2(\sqrt{2})}{\log_2(3)}$
 $= \frac{1/2}{\log_2(3)}$
 $= \frac{1}{2 \log_2(3)}$
 e) $\log_{\sqrt{5}}(5) = \frac{\log_5(5)}{\log_5(\sqrt{5})}$
 $= \frac{1}{1/2}$
 $= 2$

- a) $\frac{\log(18)}{\log(5)}$ i) $\frac{1}{2}$
 b) $\frac{\log(10)}{\log(2)} = \frac{1}{\log(2)}$ j) $\frac{3}{2}$
 k) $\frac{\log(3)}{2}$
 c) $\frac{1000}{\log(2)}$ l) 3
 d) 10 m) 1
 e) 54 n) -2
 f) 1 o) 0
 g) 12367 p) $-\frac{1}{2}$
 h) $\frac{4}{\log(2)}$ q) -1

Question 14

- a) $\log_b\left(\frac{1}{A}\right) = \log_b(B^{-1})$
 $= -\log_b(B)$
 On utilise la propriété PL4 à la dernière égalité.
 b) $\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b\left(A \frac{1}{B}\right)$
 $= \log_b(A) + \log_b\left(\frac{1}{B}\right)$
 $= \log_b(A) + \log_b(B^{-1})$
 $= \log_b(A) - \log_b(B)$
 On utilise les propriétés PL3 à la 2^e égalité et PL4 à la 3^e égalité.

Question 15

- a) Le produit est 7,3008 Il faut 9 multiplications et 7 additions, donc 16 opérations pour effectuer le produit.
 b) Soit $P = 2,34 \times 3,12$ le produit cherché. En prenant le logarithme, on a que

$$\begin{aligned} \log(P) &= \log(2,34 \times 3,12) \\ &= \log(2,34) + \log(3,12) \\ &\approx 0,36921 + 0,49415 \\ &\approx 0,86336 \end{aligned}$$

Comme $\log(P) \approx 0,86336$ implique que $P \approx 10^{0,86336}$ et que $\log(7,3008) \approx 0,86336$ est équivalent à $7,3008 = 10^{0,86336}$, on doit avoir que $P \approx 7,3008$.

Il faut 7 additions pour faire ce calcul (et avoir une table de logarithmes sous la main !)

Question 13