Fractions et quotients

1 Concept de fraction et de quotients

Définition. Une **quotients** un nombre représenté par deux nombres N et D, avec D différent de 0.

$$\frac{N}{D}.$$

Le nombre N est appelé le numérateur et le nombre D est appelé le dénominateur.

Le quotients $\frac{A}{B}$ est aussi appelé *rapport* de A par B de A sur B.

Définition. Une **fraction** ou **nombre rationnel** est un quotient dont le dénominateur et le numérateur sont des nombres entiers.

Note. Tous les nombres rationnels sont des fractions, mais l'inverse n'est pas vrai. Par exemple, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ est une fraction, mais n'est pas un nombre rationnel.

Question 1
Lesquelles des expressions suivantes sont des quotients ? Lesquels sont aussi des fractions ?

a) $\frac{3}{99}$ b) $\frac{-9}{2}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Question 2
Réécrire les expressions suivantes utilisant la barre de fraction en utilisant plutôt le symbole ÷. (Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs)

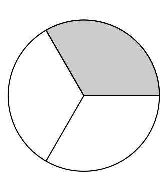
a) $\frac{5\times 2}{3}$ b) $5\times\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{2/3}$

1.1 Représentations des fractions

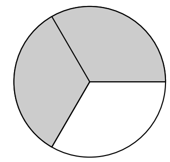
Pour développer son sens des fractions et bien comprendre les propriétés des fractions, il est important d'être capable de se les représenter.

On peut représenter les fractions par des partie de cercles (ou « pointes de tartes »).

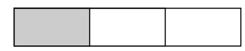
Par exemple, la fraction $\frac{1}{3}$ représente une part d'un cercle découpé en 3 :



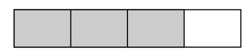
Si on a deux parts de $1/3$, on a $2/3$:



On peut aussi représenter les fractions comme les parties d'une longueur. Par exemple, $1/3$ représenté comme une longueur :



La fraction $3/4$:

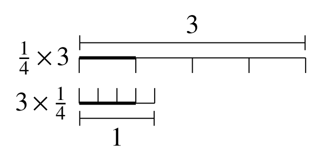


Si les représentations les plus utilisées utilisent l'aire de figures, on peut aussi représenter des fractions de longueurs : la fraction $3/4$:

Note. Une fraction comme $\frac{3}{4}$ peut être lue comme « un quart de 3 » (ou $\frac{1}{4}\times 3$) ou « 3 quarts » (ou $3\times\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{4}3 = \frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Les deux lectures représente la même fraction car elles donnent le même résultat :



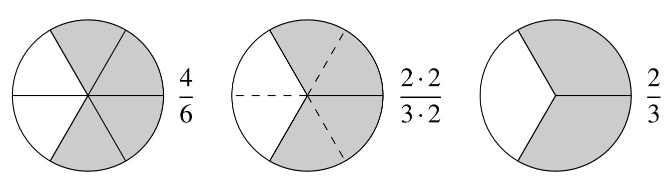
Question 3
Représenter le fait que $\frac{1}{3}\times 2 = \frac{2}{3} = 2\times\frac{1}{3}$.

1.2 Simplification

Proposition 1. On peut simplifier un facteur commun au numérateur et au dénominateur d'un quotient :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{C}$$

Exemple 1. Illustrons la simplification de la fraction $\frac{4}{6}$.



Question 4
Illustrer la simplification $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Question 5
Simplifier les quotients suivants.

a) $\dfrac{20}{25}$ b) $\dfrac{36}{60}$ c) $\dfrac{35}{100}$ d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{15\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{8\pi^2}{24\pi}$

1.3 Égalité de quotients

Définition. Deux quotients sont égalaux s'ils peuvent chacun être simplifié à un quotient ayant le même dénominateur et numérateur.

Exemple 2. Les fractions $\frac{5}{10}$ et $\frac{3}{6}$ sont égale car elle se simplifie à la même fraction.

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{3}{5} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 3. Les quotients $\frac{10\pi}{12}$ et $\frac{15\pi}{18}$ sont égaux car ils se simplifient à la même fraction.

$$\frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} \text{ et } \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{18}.$$

Question 6
Déterminer si les quotients suivants sont égaux.

a) $\dfrac{4}{10}$ et $\dfrac{400}{1000}$ c) $\dfrac{24}{56}$ et $\dfrac{12}{42}$

b) $\dfrac{9}{15}$ et $\dfrac{12}{20}$ d) $\dfrac{9\sqrt{2}}{12}$ et $\dfrac{15\sqrt{2}}{20}$

Théorème (« Règle de trois »)**.** Deux quotients $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ sont égaux quand $AD = BC$.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC.$$

Exemple 4. Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont égales car

$$2 \cdot 6 = 4 \cdot 3.$$

Exemple 5. Les quotients $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{9\pi}{12}$ sont égaux car

$$(3\pi) \cdot 12 = (9\pi) \cdot 3$$
$$36\pi = 36\pi$$

Question 7
Déterminer si les quotients suivants sont égaux à l'aide du dernier théorème.

a) $\dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{80}{100}$ b) $\dfrac{42}{3}$ et $\dfrac{13}{2}$ c) $\dfrac{6\sqrt{2}}{10}$ et $\dfrac{9\sqrt{2}}{15}$

1.4 Dénominateur commun

Proposition 2. Il est toujours possible de transformer deux quotients différents pour qu'ils aient un même dénominateur :

$$\frac{A}{B} \quad \frac{C}{D}$$
$$\frac{AD}{BD} \quad \frac{CB}{DB}$$

Exemple 6. Mettre les fractions $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$ au dénominateur commun.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$$

Exemple 7. Mettre les fractions $\dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{1}{8}$ au dénominateur commun.

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{8}{48}$$
$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{6}{48}$$

Question 8
Mettre les quotients suivants au même dénominateur.

a) $\dfrac{7}{20}$ et $\dfrac{1}{7}$ b) $\dfrac{11}{6}$ et $\dfrac{12}{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Proposition 3. Le dénominateur commun de deux quotients le plus petit est le plus petit commun multiple des dénominateurs.

Rappel. Pour trouver le plus petit commun multiple (PPCM) de deux nombres naturels, on les factorise pour ensuite former le PPCM en prenant la plus grande puissance de chacun des facteurs apparaissant dans les deux factorisations.

Exemple 8. Trouvons le plus petit commun multiple de 24 et 36.

On factorise chacun des nombres :

$$24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$
$$36 = 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

La plus grande puissance de 2 qui apparait est 3. La plus grande puissance de 3 apparait est 2.

Le PPCM est donc $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

Question 9
Déterminer le PPCM de 60 et 90.

Exemple 9. Mettre les fractions $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$ au dénominateur commun en prenant le plus petit dénominateur possible.

Le plus petit commun multiple de $6 = 2 \cdot 3$ et $8 = 2^3$ est $2^3 \cdot 3 = 24$.

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24},$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{24}.$$

Question 10
Mettre les fractions suivantes au dénominateur commun en prenant le plus petit dénominateur possible.

a) $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{30}$. b) $\frac{5}{42}$ et $\frac{3}{63}$.

1.5 Comparaison de quotients

Proposition 4. Si deux quotients ont le même dénominateur, on peut les comparer en comparant leur numérateurs.

$$\frac{A}{C} \leq \frac{B}{C} \text{ si } A \leq B$$

Note. La dernière proposition permet donc de comparer deux quotients quelconques en les mettant au dénominateur commun.

Exemple 10. Déterminons laquelle de ces deux fractions est la plus grande :

$$\frac{4}{5} \text{ et } \frac{13}{15}.$$

On met les deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}.$$

Il faut donc comparer

$$\frac{12}{15} \text{ et } \frac{13}{15}.$$

Comme $\frac{4}{5} = \frac{12}{15} < \frac{13}{15}$, on a que

$$\frac{4}{5} < \frac{13}{15}.$$

Question 11
Déterminer laquelle des deux fractions est la plus grande (sans convertir en nombres décimaux !)

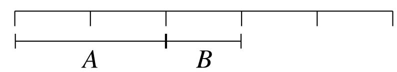
a) $\frac{5}{6}$ et $\frac{4}{5}$ b) $\frac{7}{24}$ et $\frac{3}{10}$

2 Opérations sur les quotients

2.1 Addition et soustraction

Définition. Si deux quotients on le même dénominateur, on les additionne ou les soustrait en additionnant leurs numérateurs :

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}.$$



Exemple 11. Additionnez et simplifier le résultat.

$$\frac{3}{16} + \frac{5}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 12. Additionnez et simplifier le résultat.

$$\frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}+\pi}{5}.$$

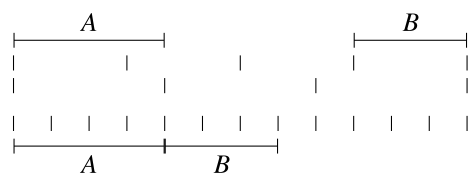
Question 12
Additionnez et simplifier le résultat.

a) $\frac{5}{32} + \frac{7}{32}$ b) $\frac{26}{42} - \frac{12}{42}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Définition. Si deux quotients ont des dénominateurs différents, on les additionne trouvant un dénominateur commun :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AF}{BF} + \frac{CF}{DF},$$

où $BF = DF$ toujours un dénominateur commun possible (mais pas nécessairement le plus petit).



Exemple 13. Additionnez et simplifier le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} + \frac{1}{5} &= \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4} \\ &= \frac{15}{20} + \frac{4}{20} \\ &= \frac{19}{20}.\end{aligned}$$

Exemple 14. Additionnez et simplifier le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{3}{16}+\frac{1}{6} &= \frac{3}{2^4}+\frac{1}{2\cdot 3}\\ &= \frac{3\cdot 3}{2^4\cdot 3}+\frac{1\cdot 2^3}{2\cdot 3\cdot 2^3}\\ &= \frac{9}{48}+\frac{8}{48}\\ &= \frac{17}{48}.\end{aligned}$$

Exemple 15. Additionnez et simplifier le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}-\frac{5}{12} &= \frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2}\\ &= \frac{9}{24}-\frac{10}{24}\\ &= -\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Question 13
Additionnez et simplifier le résultat.

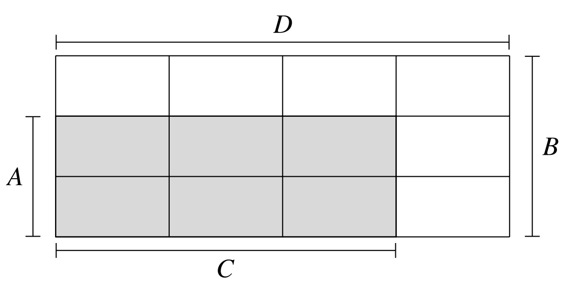
a) $\frac{5}{32}+\frac{7}{32}$ c) $\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{5\sqrt{2}}{7}+\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{7}{10}-\frac{3}{4}$

2.2 Produit de fractions

Définition. Le produit de deux fractions s'obtient en faisant le produit de leurs numérateurs et de leurs dénominateurs :

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$



Exemple 16. Multiplier et simplifier le résultat.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}.$$

Exemple 17. Multiplier et simplifier le résultat.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 5}=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Note. Dans le dernier exemple, on obtient le même résultat en simplifiant les facteurs communs *avant* de multiplier les numérateurs et dénominateurs. Les calculs sont généralement plus simples si on simplifie dès que possible :

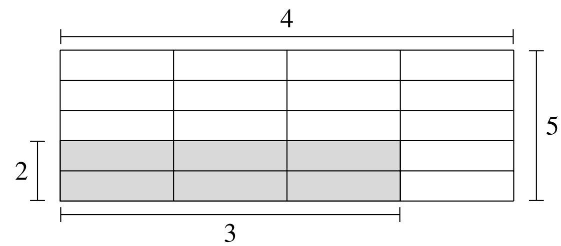
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 5}=\frac{3}{5}.$$

Exemple 18. Multiplier et simplifier le résultat.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 5}=\frac{2}{2\cdot 5}=\frac{1}{5}.$$

Exemple 19. Représenter le produit $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ en s'inspirant de l'illustration donnée dans la définition du produit de deux fractions.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$$



Question 14
Multiplier et simplifier le résultat.

a) $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{25}$ b) $\frac{24}{14}\cdot\frac{21}{32}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$

Question 15
Représenter le produit $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}$ en s'inspirant de l'illustration donnée dans la définition du produit de deux fractions.

2.3 Inverse

Définition. L'inverse d'un nombre A est le nombre $\frac{1}{A}$ tel que

$$A\cdot\frac{1}{A}=1$$

Exemple 20. L'inverse du nombre 2 est $\frac{1}{2}$ car $2\cdot\frac{1}{2}=1$.

L'inverse du nombre 5 est $\frac{1}{5}$ car $5\cdot\frac{1}{5}=1$.

L'inverse du nombre π est $\frac{1}{\pi}$ car $\pi\cdot\frac{1}{\pi}=1$.

Proposition 5. L'inverse d'une fraction est le rapport inverse.

$$\frac{1}{\left(\frac{A}{B}\right)}=\frac{B}{A}.$$

Exemple 21.

$$\frac{1}{2/3}=\frac{3}{2}.$$

$$\frac{1}{-4/5}=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4}.$$

Question 16
Déterminer l'inverse des quotients suivants.

a) $\frac{253}{473}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.4 Quotient

Définition. Le quotient de deux quotients est le produit du numérateur par l'inverse du dénominateur.

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \frac{A}{B}\frac{D}{C}$$

Exemple 22.

$$\frac{2/3}{8/9} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{2\cdot 9}{3\cdot 8} = \frac{3}{4}.$$

Exemple 23.

$$\frac{1/5}{2} = \frac{1/5}{2/1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 1}{5\cdot 2} = \frac{1}{10}.$$

Exemple 24.

$$\frac{\pi/2}{3} = \frac{\pi/2}{3/1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi\cdot 1}{2\cdot 3} = \frac{\pi}{6}.$$

Question 17
Évaluer et simplifier.

a) $\dfrac{2/5}{3/4}$ b) $\dfrac{49/12}{7/6}$ c) $\dfrac{33}{2/3}$ d) $\dfrac{\pi/3}{2/5}$

3 Propriétés des fractions

Proposition 6.

(F0) $\dfrac{1}{A}$ non défini pour $A = 0$ (Division par zéro)

(F1) $\dfrac{A}{1} = A$ (Division par 1)

(F2) $A\dfrac{1}{B} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{B}A$ (Notation fractionnaire)

(F3) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$ (Égalité de fractions)

(F4) $\dfrac{1}{1/A} = A$ (Inverse de l'inverse)

(F5) $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A}{B}$ (Simplification facteur commun)

(F6) $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{B} = \dfrac{A+C}{B}$ (Somme, même déno.)

(F7) $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD+CB}{BD}$ (Somme, déno. commun)

(F8) $\left(\dfrac{A}{B}\right)\left(\dfrac{C}{D}\right) = \dfrac{AC}{BD}$ (Produit)

(F9) $\dfrac{A/B}{C/D} = \dfrac{A}{B}\dfrac{D}{C}$ (Division)

Exemple 25. Évaluer l'expression suivante.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}}{12+\frac{3}{5}} &= \frac{\frac{2\cdot 9}{3\cdot 5}}{\frac{5}{10}+\frac{6}{10}} \\
&= \frac{\left(\frac{2\cdot 3}{5}\right)}{\left(\frac{11}{10}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{6}{5}\right)}{\left(\frac{11}{10}\right)} \\
&= \frac{6}{5}\cdot\frac{10}{11} \\
&= \frac{6\cdot 10}{5\cdot 11} \\
&= \frac{6\cdot 2}{11} \\
&= \frac{12}{11}
\end{aligned}$$

Question 18
Évaluer les expressions suivantes.

a) $\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}{4/5}$

Question 19
Effectuer les calculs suivants en utilisant le moins d'étapes possibles en utilisant que les propriétés des quotients F1 à F9 et les propriétés de base de la multiplication et de l'addition. Dire à chaque égalité quelle propriété est utilisée.

a) $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2/5}{2}+\dfrac{3}{5}$

Exercices supplémentaires

Question 20
Réécrire les expressions suivantes utilisant la barre de fraction en utilisant plutôt le symbole ÷. (Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs)

a) $\dfrac{2\times 3}{4}$

b) $2\times\dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{(2\times 3)}{4}$

d) $\dfrac{2\times 3}{4\times 5}$

e) $\dfrac{2+3}{4+5}$

f) $\dfrac{2/3}{4/5}$

g) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1/2}}$

Question 21
Réécrire les expressions suivantes utilisant le symbole ÷ en utilisant plutôt une barre de fraction. (Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs)

a) $2\times(3\div4)$
b) $2\times3\div4$
c) $(2\times3)\div4$
d) $2\times(3\div4)$
e) $2\times3\div4\times5$
f) $2\times3\div(4\times5)$
g) $(2\times3)\div(4\times5)$
h) $2\div3\div4$
i) $2\div(3\div4)$
j) $2\div3\div4\div5$
k) $(2\div3)\div(4\div5)$

Question 22
Simplifier les fractions suivantes.

a) $\frac{12}{24}$
b) $\frac{4}{10}$
c) $\frac{12}{18}$
d) $\frac{15}{25}$
e) $\frac{30}{100}$
f) $\frac{40}{100}$
g) $\frac{50}{100}$
h) $\frac{64}{128}$
i) $\frac{81}{3}$
j) $\frac{24}{34}$
k) $\frac{45}{100}$
l) $\frac{26}{18}$
m) $\frac{70}{30}$
n) $\frac{75}{30}$
o) $\frac{30}{35}$
p) $\frac{75}{30}$
q) $\frac{64}{24}$
r) $\frac{21}{49}$

Question 23
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{2\cdot3\cdot5}{4\cdot25}$
b) $\frac{9\cdot25}{3\cdot125}$
c) $\frac{9/5}{3/125}$
d) $\frac{18/4}{3/24}$
e) $\frac{5/99}{3/11}$
f) $\frac{19+9}{23+12}$
g) $\frac{14/18}{-21/12}$
h) $\frac{-15/9}{18/-12}$
i) $\frac{4}{2/5}$
j) $\frac{3}{4/5}$
k) $\frac{3/4}{5}$
l) $\frac{18/21}{12}$
m) $\frac{14/12}{21}$

Question 24
Trouver le plus petit commun multiple des nombres suivants.

a) 32 et 12
b) 15 et 10
c) 8 et 12
d) 21 et 14
e) 73 et 43
f) 5950 et 260
g) 24, 16 et 12
h) 480, 210, 735 et 49

Question 25
Mettre au dénominateur commun les factions suivantes.

a) $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$
c) $\frac{2}{15}$ et $\frac{3}{10}$
d) $\frac{3}{14}$ et $\frac{5}{21}$

Question 26
Effectuer chacune des opérations ci-dessous et simplifier le résultat.

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$
b) $\frac{5}{12}-\frac{5}{8}$
c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
e) $1+\frac{3}{4}$
f) $1-\frac{15}{32}$
g) $2+\frac{2}{5}$
h) $3-\frac{1}{4}$
i) $2-\frac{3}{8}$

Question 27
Effectuer chacune des opérations ci-dessous et simplifier le résultat.

a) $\frac{3}{4}\left(\frac{5}{3}\right)$
b) $\frac{5}{12}\left(\frac{5}{3}\right)$
c) $\frac{25}{26}\left(\frac{13}{15}\right)$
d) $4\left(\frac{5}{48}\right)$
e) $\frac{3/7}{5/3}$
f) $\frac{3/7}{3/5}$

Question 28
Effectuer chacune des opérations ci-dessous et simplifier le résultat.

a) $\frac{2}{3}+\frac{4/5}{1/3}-\frac{3}{2}$
b) $2+\left(\frac{4}{3}\right)\frac{7/2}{14/9}$
c) $-\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{6}\right)\left(\frac{5}{7}\right)$
d) $\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}}$
e) $\frac{\frac{1}{7}-\frac{2}{7}}{7}$
f) $\frac{7}{1/7-2/7}$
g) $\frac{1/2}{3-4/3}$
h) $\frac{\frac{3}{7}-\frac{4}{5}}{3}$
i) $\frac{2-\frac{2}{5}}{2}$
j) $\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{3}$
k) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

Question 29
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{256}{5(16)}$
b) $5\times39-12\times13$
c) $\frac{2^4 3^2 5^3}{100}$
d) $\frac{2^4+2^3}{64}$
e) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$
f) $\frac{3}{40}-\frac{5}{24}$
g) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}$
h) $10\left(\frac{0}{2}\right)\frac{1}{2}$

Question 30
Déterminer laquelle des deux fractions suivante est la plus grande (sans convertir en décimale !)

a) $\frac{5}{8}$ et $\frac{5}{9}$

b) $\frac{5}{12}$ et $\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{10}$ et $\frac{5}{12}$

d) $\frac{3}{20}$ et $\frac{1}{12}$

Question 31
Mettre les nombres suivants en ordre croissant sans les convertir en notation décimale.

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$. b) $\frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{2}{5}$. c) $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{2}{7}$.

Question 32
Dans le système de mesure impérial en pouces, on utilise les fractions de pouces pour les longueurs plus petites que le pouce. On parle donc de quart de pouce, de huitième de pouce, etc. On utilise que des fractions dont le dénominateur est une puissance de 2.

a) Mettre les longueurs suivantes en ordre croissant.

$$\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{15}{32}$$

b)

$$\frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{21}{32}, \frac{1}{2}, \frac{39}{64}$$

Question 33
Simplifier les quotients suivants.

a) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$

b) ++

Question 34
La notation fractionnaire n'a pas toujours existé ! Dans l'Égypte des pharaons, les seules fractions qui pouvait être écrites avec les hiéroglyphes était celles de la forme $\frac{1}{n}$, c'est à dire les inverses des nombres, à l'exception de la fraction $\frac{2}{3}$ qui avait son propre symbole.

Supposons pour simplifier que le symbole égyptien pour $\frac{1}{n}$ est $\overline{n}$.

a) Que vaut $\overline{4}+\overline{4}$?

b) Que vaut $\overline{3}+\overline{4}$?

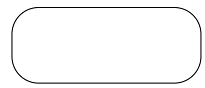
c) Exprimer la fraction $\frac{3}{4}$ comme une somme de fractions égyptiennes

d) Exprimer la fraction $\frac{5}{6}$ comme une somme de fractions égyptiennes

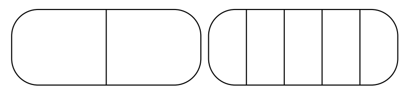
e) Que vaut $\overline{3}+\overline{5}$? Pouvez vous trouver une manière d'additionner sans jamais utiliser la notation fractionnaire moderne ?

Question 35
Les raisons précises ayant incité les égyptiens à conserver leur manière de noter les fractions aussi longtemps, on pense qu'elle permettait aux scribes de distribuer plus efficacement le grain servant à payer les travailleurs. Le papyrus Rhind, une des sources principales de notre connaissance des mathématiques en Égypte ancienne, comporte plusieurs problèmes de « division de pains » tels que ceux décris dans ce qui suit.

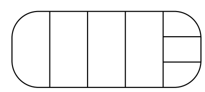
Représenterons une quantité de blé par une miche de pain.



On peut diviser une miche entière en autant de parts égales que l'on veut. (La taille de chaque part correspondra à une fraction égyptienne : si on divise en 4, chaque part sera de $1/4$)



On peut aussi diviser une part en plus petites parts égales. Par exemple, si on divise un pain en cinq parts égales de un cinquième de pain, on peut prendre une de ces parts de pain et la diviser en trois pour obtenir trois parts d'un quinzième de pain.

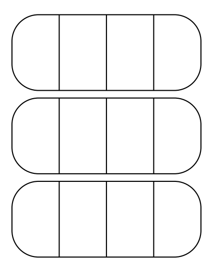


Comme la distribution du salaire était fastidieuse, on cherchait à diminuer la complexité de l'opération en réduisant le nombre de parts à distribuer.

Par exemple, comment diviser 3 pains équitablement entre 4 travailleurs pour faire la distribution en manipulant le moins de morceaux de pain possible ? La notation moderne

$$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$$

suggère de couper chaque pain en quatre et de donner à chaque travailleur trois quart de miche.



Cette façon de procéder nous oblige cependant à distribuer au total 12 morceaux de miches, et chaque travailleur recevra des quarts de miche.

Note : ces trois problèmes sont tirés du papyrus Rhind, recueil de problèmes mathématiques de l'Égypte ancienne.

a) Peut-on faire mieux ? (indice : en fractions égyptiennes, $\frac{3}{4}$ est exprimé comme $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$!)

b) Comment diviser équitablement 4 pains entre 5 travailleurs en distribuant moins que $20 = 4 \times 5$ morceaux de pain ?

c) Comment diviser équitablement 9 pains entre 10 travailleurs en distribuant moins que $10 \times 9 = 90$ morceaux de pain ?

Question 36
Démontrer que $\frac{1}{A/B} = \frac{B}{A}$ à l'aide de la définition de l'inverse d'un nombre.

Question 37
Démontrer que $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$ à l'aide des propriétés des fractions.

Solutions

Question 1

a) C'est une fraction et un nombre rationnel

b) C'est une fraction et un nombre rationnel (le numérateur ou le dénominateur peuvent être négatifs)

c) C'est un quotient, mais pas une fraction car le numérateur n'est pas un nombre entier.

d) C'est une quotient mais pas une fraction car le numérateur est n'est pas un nombre entier.

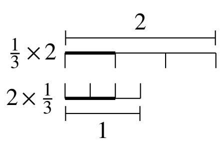
Question 2

a) $5 \times 2 \div 3$

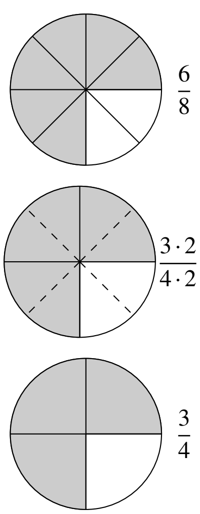
b) $5 \times (2 \div 3)$

c) $5 \times (2 \div 3)$

Question 3



Question 4



Question 5

a) $\frac{20}{25} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{36}{60} = \frac{4 \cdot 9}{4 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{35}{100} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 20} = \frac{7}{20}$

d)
$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt{2}}{15\sqrt{2}} &= \frac{5\sqrt{2}}{3 \cdot 5\sqrt{2}} \\ &= \frac{\cancel{5\sqrt{2}}}{3\cancel{5\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}\frac{8\pi^2}{24\pi} &= \frac{8\pi \cdot \pi}{3 \cdot 8 \cdot \pi} \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Question 6

a) $\frac{4}{10} = \frac{400}{1000}$ car les deux fractions sont égales à $\frac{2}{5}$.

b) $\frac{9}{15} = \frac{12}{20}$ car les deux fractions sont égales à $\frac{3}{5}$.

c) Comme $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$ et $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$, les deux fractions ne sont pas égales.

d) $\frac{9\sqrt{2}}{12} = \frac{15\sqrt{2}}{20}$ car les deux fractions sont égales à $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Question 7

a) $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$ car

$$\begin{aligned}4 \cdot 100 &= 5 \cdot 80 \\ 400 &= 400\end{aligned}$$

b) $\frac{42}{3} \neq \frac{23}{2}$ car

$$42 \times 2 \neq 23 \times 3$$

$$84 \neq 69.$$

c) $\frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{9\sqrt{2}}{15}$ car

$$6\sqrt{2} \times 15 = 90\sqrt{2},$$
$$9\sqrt{2} \times 10 = 90\sqrt{2}.$$

Question 8

a) $\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 7}{20 \cdot 7} = \frac{49}{140}$
$\frac{1}{7} = \frac{1 \cdot 20}{7 \cdot 20} = \frac{20}{140}$

b) $\frac{11}{6} = \frac{11 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{55}{30}$
$\frac{12}{5} = \frac{12 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{72}{30}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5\sqrt{3}}{10}$
$\frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{10}$

Question 9

$60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$
$90 = 9 \times 10 = 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$. Le PPCM est donc

$$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180.$$

Question 10

a) Le PPCM de 12 et 30 est 60. $\frac{1}{12} = \frac{5}{60}$
$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$

b) Le PPCM de 12 et 30 est 60. $\frac{1}{12} = \frac{5}{60}$
$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$

Question 11

a) $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$
$\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ On a donc

$$\frac{5}{6} > \frac{4}{5}.$$

b) $frac724 = \frac{70}{240}$
$\frac{3}{10} = \frac{72}{240}$
On a donc

$$\frac{7}{24} < \frac{3}{10}.$$

Question 12

a)
$$\begin{aligned}\frac{5}{32} + \frac{7}{32} &= \frac{12}{32} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{26}{42} - \frac{12}{42} &= \frac{14}{42} \\ &= \frac{2 \cdot 7}{4 \cdot 7} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt{3}2}{+}\frac{3\sqrt{3}}{2} &= \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{(5+3)\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{2} \\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Question 13

a) $\dfrac{5}{32}+\dfrac{7}{32}=\dfrac{12}{32}$
$=\dfrac{3}{8}$

b) $\dfrac{7}{10}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{14}{20}-\dfrac{15}{20}$
$=\dfrac{-1}{20}$
$=-\dfrac{1}{20}$

c) $\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{2\cdot 5\pi}{2\cdot 6}-\dfrac{3\cdot 3\pi}{3\cdot 4}$
$=\dfrac{10\pi}{12}-\dfrac{9\pi}{12}$
$=\dfrac{10\pi-9\pi}{12}$
$=\dfrac{\pi}{12}$

d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{15\sqrt{2}}{21}+\dfrac{14\sqrt{2}}{21}$
$=\dfrac{15\sqrt{2}+14\sqrt{2}}{21}$
$=\dfrac{(15+14)\sqrt{2}}{21}$
$=\dfrac{(29)\sqrt{2}}{21}$

Question 14

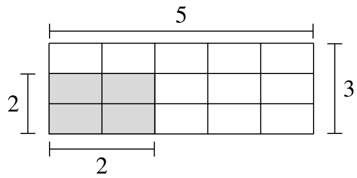
a) $\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4}{25}=\dfrac{5\cdot 4}{12\cdot 25}$
$=\dfrac{5}{3\cdot 25}$
$=\dfrac{1}{3\cdot 5}$
$=\dfrac{1}{15}$

b) $\dfrac{24}{14}\cdot\dfrac{21}{32}=\dfrac{24\cdot 21}{14\cdot 32}$
$=\dfrac{24\cdot 3}{2\cdot 32}$
$=\dfrac{12\cdot 3}{2\cdot 16}$
$=\dfrac{6\cdot 3}{2\cdot 8}$
$=\dfrac{3\cdot 3}{2\cdot 4}$
$=\dfrac{9}{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{5\cdot 4}$
$=\dfrac{2}{5\cdot 4}$
$=\dfrac{1}{5\cdot 2}$
$=\dfrac{1}{10}$

Question 15

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$



Question 16

a) $\frac{1}{253/473}=\frac{473}{253}$

b) $\frac{1}{1/3}=\frac{3}{1}=3$

c) $\frac{1}{3}=\frac{1}{3/1}=\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}/2}=\frac{2}{\sqrt{2}}$

Question 17

a) $\dfrac{2/5}{3/4}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{3}$
$=\dfrac{2\cdot 4}{5\cdot 3}$
$=\dfrac{8}{15}$

b) $\dfrac{49/12}{7/6}=\dfrac{49}{12}\cdot\dfrac{6}{7}$
$=\dfrac{49\cdot 6}{12\cdot 7}$
$=\dfrac{7}{2}$

c) $\dfrac{33}{3/2}=\dfrac{33/1}{3/2}$
$=\dfrac{33}{1}\cdot\dfrac{2}{3}$
$=\dfrac{33\cdot 2}{1\cdot 3}$
$=\dfrac{11\cdot 2}{1}$
$=22$

d) $\dfrac{\pi/3}{2/5}=\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{5}{2}$
$=\dfrac{\pi\cdot 5}{3\cdot 2}$
$=\dfrac{5\pi}{6}$

Question 18

a) $\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}{4/5}=\dfrac{\frac{8}{10}-\frac{5}{10}}{4/5}$
$=\left(\dfrac{8}{10}-\dfrac{5}{10}\right)\cdot\dfrac{5}{4}$
$=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{5}{4}$
$=\dfrac{3\cdot 5}{10\cdot 4}$
$=\dfrac{3\cdot 1}{2\cdot 4}$
$=\dfrac{3}{8}$

Question 19

a) $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{4}$ (Commutativité)
$=\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{3}{4}$ (Associativité)
$=\left(\dfrac{2+1}{3}\right)\dfrac{3}{4}$ (F6)
$=\left(\dfrac{3}{3}\right)\dfrac{3}{4}$ $(2+1=3)$
$=(1)\,\dfrac{3}{4}$ (F5)
$=\dfrac{3}{4}$ (Produit par 1)

b) $\dfrac{2/5}{2}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{2/5}{2/1}+\dfrac{3}{5}$ (F1)
$=\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}$ (F9)
$=\dfrac{2\cdot 1}{5\cdot 2}+\dfrac{3}{5}$ (F8)
$=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}$ (F5)
$=\dfrac{1+3}{5}$ (F6)
$=\dfrac{4}{5}$ $(1+3=4)$

Question 20

a) $2\times 3\div 4$

b) $2\times 3\div 4$

c) $(2\times 3)\div 4$

d) $(2\times 3)\div(4\times 5)$

e) $(2+3)\div(4+5)$

f) $(2\div 3)\div(4\div 5)$

g) $1\div(1+1\div(1+1\div 2))$

Question 21

a) $2\times\frac{3}{4}$

b) $\frac{2\times 3}{4}$

c) $\frac{2\times 3}{4}$

d) $2\times\frac{3}{4}$

e) $2\times\frac{3}{4}\times 5$

f) $2\times\frac{3}{4\times 5}$

g) $\frac{2\times 3}{4\times 5}$

h) $\frac{2/3}{4}$

i) $\frac{2}{3/4}$

j) $\dfrac{\frac{2/3}{4}}{5}$

k) $\frac{2/3}{4/5}$

Question 22

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{10}$

f) $\frac{2}{5}$

g) $\frac{1}{2}$

h) $\frac{1}{2}$

i) 27

j) $\frac{12}{17}$

k) $\frac{9}{20}$

l) $\frac{13}{9}$

m) $\frac{7}{3}$

n) $\frac{5}{2}$

o) $\frac{6}{7}$

p) $\dfrac{5}{2}$

q) $\frac{8}{3}$

r) $\frac{3}{7}$

Question 23

a) $\frac{3}{10}$
b) $\frac{3}{5}$
c) 75
d) 36
e) $\frac{5}{27}$
f) $\frac{4}{5}$
g) $\frac{-4}{9}$
h) $\frac{10}{9}$
i) 10
j) $\frac{15}{4}$
k) $\frac{3}{20}$
l) $\frac{1}{14}$
m) $\frac{1}{18}$

Question 24

a) 96
b) 30
c) 24
d) 42
e) 3139
f) $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 = 154700$
g) 48
h) $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 23520$

Question 25

a) $\frac{9}{12}$ et $\frac{2}{12}$
b) $\frac{2}{10}$ et $\frac{1}{10}$
c) $\frac{4}{30}$ et $\frac{9}{30}$
d) $\frac{9}{42}$ et $\frac{10}{42}$

Question 26

a) $\frac{9}{24} + \frac{10}{24} = \frac{19}{24}$
b) $\frac{10}{24} - \frac{15}{24} = -\frac{5}{24}$
c) $\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$
d) $\frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$
e) $\frac{7}{4}$
f) $\frac{17}{32}$
g) $\frac{12}{5}$
h) $\frac{11}{4}$
i) $\frac{13}{8}$

Question 27

a) $\frac{15}{12}$
b) $\frac{25}{36}$
c) $\frac{5\cdot\cancel{5}}{2\cdot\cancel{13}}\frac{\cancel{13}}{3\cdot\cancel{5}} = \frac{5}{3}$
d) $\frac{15}{12}$
e) $\frac{9}{35}$
f) $\frac{5}{7}$

Question 28

a) $\frac{47}{30}$
b) 5
c) $1/7$
d) $13/22$
e) $-\frac{1}{49}$
f) -49
g) $\frac{3}{10}$
h) $\frac{13}{105}$
i) $\frac{4}{5}$
j) $-\frac{1}{27}$
k) $\frac{3}{5}$

Question 29

a) $16/5$
b) $(13)(15-12) = 39$
c) $2^2 3^2 (5) = 180$
d) $3/2^3$
e) $31/35$
f) $-2/15$
g) $30/41$
h) 0

Question 30

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{3}{20}$

Question 31

a) $\frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$
b) $\frac{2}{5} < \frac{5}{12} < \frac{3}{7}$
c) $\frac{2}{7} < \frac{1}{5} < \frac{3}{8}$

Question 32

a) $\frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{15}{32} < \frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2} < \frac{9}{16} < \frac{39}{64} < \frac{5}{8} < \frac{21}{32}$

Question 33

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Question 34

a) $$\begin{aligned} \overline{4}+\overline{4} = &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= \overline{2} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \overline{3}+\overline{4} = &= \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \\ &= \frac{4}{12}+\frac{3}{12} \\ &= \frac{7}{12} \\ &= \frac{6}{12}+\frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{12} \\ &= \overline{2}+\overline{12} \end{aligned}$$

c) $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \overline{2} + \overline{4}$

d) $$\begin{aligned} \frac{5}{6} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3} \\ &= \overline{2}+\overline{3} \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\overline{3}+\overline{5} &= \frac{1}{3}+\frac{1}{5}\\ &= \frac{5}{15}+\frac{3}{15}\\ &= \frac{8}{15}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{30}\\ &= \overline{2}+\overline{30}\end{aligned}$$

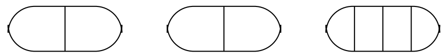
Si vous avez tenté de faire cette addition en n'utilisant que la notation égyptienne, vous vous êtes probablement rendu compte qu'il manque certains éléments. Les égyptiens utilisaient des tables d'addition de fraction où certaines sommes étaient connue.

Question 35

a) 3 pains divisés entre 4 travailleurs :

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

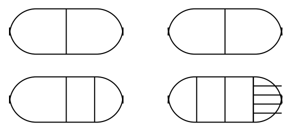
On coupe donc les deux premiers pains en deux, ce qui donne quatre demi-pains, et on coupe le pain qui reste en 4, ce qui ajoute quatre quart de pain. Chaque travailleur reçoit donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ de pain en manipulant 8 morceaux de pain.



b)

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

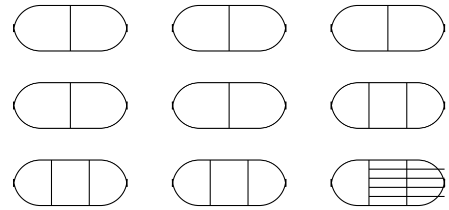
Cette manière de diviser les quatre pains créé 15 morceaux.



c)

$$\frac{9}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

Cette manière de découper les neufs pains donne 30 morceaux à distribuer.



Question 36

$\frac{1}{A/B}\,\frac{B}{A}$ car

$$\frac{B}{A}\frac{A}{B} = \frac{BA}{AB} = 1.$$

Question 37

$$-\frac{A}{B} = (-1)A\frac{1}{B} = (-A)\frac{1}{B} = \frac{-A}{B}$$