

Polynômes et opérations sur les polynômes

1 Polynômes

Définition. Un **polynôme** est une expression algébrique ayant une forme particulière : c'est une somme de **monômes**.

Un **monôme** est une expression algébrique de la forme

$$ax^n$$

où a est un nombre quelconque appelé le **coefficient** de x^n et n est un nombre naturel.

Exemple 1. Les expressions suivantes sont des monômes :

$$2x^3 \quad \frac{1}{3}x^5 \quad \sqrt{3}x^2$$

Note. Quand un coefficient est une fraction, un monôme peut s'écrire de différentes manières :

$$\frac{2}{3}x^5 = \frac{2x^5}{3}$$

On considère équivalentes ces deux manières d'écrire les monômes.

Note. Quand un coefficient est 1 ou -1 , on l'omet habituellement quand on écrit un monôme :

$$x^5 = (1)x^5$$

$$-x^5 = (-1)x^5$$

Note. Une constante est un monôme. Par exemple 3 est un monôme car il peut être écrit comme un monôme en utilisant le fait que $x^0 = 1$:

$$3 = 3x^0$$

Exemple 2. Les expressions suivantes sont des polynômes car elles sont des sommes de monômes.

$$x^2 + 2x + 3 \quad 4x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$x \quad 3 \quad 2x^3 + \frac{1}{3}x^5 + \sqrt{3}x^2$$

Les expressions suivantes ne sont pas des polynômes

$$\sqrt{x} + x + 1 \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3$$

Définition.

Un polynôme comportant deux monômes est appelé un **binôme**.

Un polynôme comportant trois monômes est appelé un **trinôme**.

Question 1

Identifier les polynômes parmi les expressions suivantes.

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$

d) $\frac{x^3}{5} - 5x^4$

b) $\frac{x^2 + 1}{5}$

e) $\frac{x^3}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}x^4$

c) $\frac{5}{x^2 + 1}$

f) $\sqrt{\frac{x^3}{5}} - \sqrt{5}x^4$

1.1 Degré

Définition. Le **degré** d'un polynôme est la plus grande puissance de la variable qui apparaisse dans le polynôme. Si P est un polynôme, on note $\deg(P)$ le degré de P .

Exemple 3.

$$\deg(x^2 + 4x - 3) = 2$$

$$\deg\left(\frac{x}{2} - 3\right) = 1$$

$$\deg(x^5 - 4x^3 + \sqrt{2}x^2 - x + 1) = 5$$

Note. Le degré d'un polynôme qui n'est qu'une constante $C \in \mathbb{R}$ est 0. Comme $x^0 = 1$, on a toujours que $C = Cx^0$, autrement dit la constante C peut toujours être vue comme un monôme où l'exposant de la variable est zéro.

$$\deg(5) = \deg(5x^0) = 0$$

$$\deg(\sqrt{2}) = \deg(\sqrt{2}x^0) = 0$$

Question 2

Donner le degré des polynômes suivants.

a) $1 + x + x^3 + x^5$

c) $x^3 - x^2$

b) $\sqrt{2}x + \frac{x^3}{5} + \frac{\sqrt{2}x^5}{22}$

d) $5^3 - 5^2$

1.2 Écriture d'un polynôme

On écrit habituellement les termes d'un polynôme par ordre de degré croissant ou décroissant.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Tout polynôme peut être écrit de cette manière.

Exemple 4. Le polynôme $3x^2 - 2x^3 - 5 + x$ s'écrit (degrés décroissants)

$$-2x^3 + 3x^2 + x - 5$$

Le polynôme $x^4 + \frac{x^2}{3} - 4 - x^5$ s'écrit (degrés décroissants)

$$-x^5 + x^4 + \frac{x^2}{3} - 4$$

Question 3

Réécrire les polynômes suivants par ordre de degré croissant.

a) $3x^2 + 7 - x^6 + x$ b) $\frac{x^3}{5} + x^2 - \frac{\sqrt{5}x}{3} + \frac{5}{\sqrt{3}}$

2 Opérations polynômiales

2.1 Addition et soustraction

Additionner ou soustraire deux monômes de même degré revient à additionner les coefficients en utilisant la distributivité.

Exemple 5.

$$3x^2 + 4x^2 = (3+4)x^2 = 7x^2$$

$$-3x^3 + 5x^3 = (-3+5)x^3 = 2x^3$$

Question 4

Additionner ou soustraire les monômes donnés.

a) $5x^2 + 3x^2$ b) $4x^4 - 5x^4$ c) $\frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{5}$

On additionne ou soustrait des polynômes en additionnant ou soustrayant les monômes de même degrés.

Exemple 6. Somme de deux polynômes.

$$(3x^2 - 2x + 4) + (2x^2 + 3x - 2) = (3+2)x^2 + (-2+3)x + (4-2)$$

$$= 5x^2 + x + 2.$$

Différence de deux polynômes.

$$(3x^2 - 2x + 4) - (2x^2 + 3x - 2) = (3-2)x^2 + (-2-3)x + (4+2)$$

$$= x^2 - 5x + 6.$$

Question 5

Effectuer les additions ou soustractions polynômiales suivantes.

a) $(x^3 + x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x - 3)$

b) $(2x^2 - 3x - 4) - (x^2 - 2x - 5)$

c) $(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}) + (\frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} - 1)$

d) $(\sqrt{5}x^2 + 1) - (\frac{\sqrt{5}}{2}x^2 - x + 1)$

Proposition 1. Si P et Q sont des polynômes, alors

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

Exemple 7. Si $P = x^2 + x + 1$ et $Q = x^2 + 2x + 3$, alors

$$\deg(P + Q) = \deg(2x^2 + 3x + 4) = 2$$

et

$$\deg(P) = 2 \text{ et } \deg(Q) = 2$$

donc $\max(\deg(P), \deg(Q)) = 2$.

Si $P = x^2 + x + 1$ et $Q = -x^2 + 2x + 3$, alors

$$\deg(P + Q) = \deg(3x + 4) = 1$$

et comme $\deg(P) = 2$ et $\deg(Q) = 2$, on a $\max(\deg(P), \deg(Q)) = 2$. Dans ce cas $\deg(P + Q)$ est plus petit que $\max(\deg(P), \deg(Q))$

2.2 Multiplication

On multiplie des monômes à l'aide des propriétés des produits et des exposants.

Exemple 8.

$$(3x^2)(5x^3) = (3)(5)x^2x^3 = 15x^5$$

$$\left(\frac{x^2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}x^3\right) = \frac{1}{3}\frac{2}{5}x^2x^3 = \frac{2}{15}x^5$$

Question 6

Multiplier les monômes suivants.

a) $(x^3)(x^5)$ b) $\left(\frac{2x^3}{3}\right)\left(\frac{4x^5}{5}\right)$ c) $(\sqrt{2}x^3)(\sqrt{6}x^5)$

Pour multiplier des polynômes, on utilise la distributivité et on simplifie.

Exemple 9. Produit de deux polynômes :

$$(x^2 + 2x + 3)(2x + 5) = x^2(2x + 5) + 2x(2x + 5) + 3(2x + 5)$$

$$= 2x^3 + 5x^2 + 4x^2 + 10x + 6x + 15$$

$$= 2x^3 + 9x^2 + 16x + 15.$$

Question 7

Effectuer les multiplication polynômiales suivantes.

a) $(x^2 + 1)(x + 2)$ c) $(x^2 - x + 2)(3x + 1)$

b) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ d) $\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

Proposition 2. Si P et Q sont deux polynômes, le degré de leur produit est la somme de leur degrés.

Exemple 10. Le degré de $(x^2 + x + 1)(x^3 - 4x + 5)$ est 5.

Le degré de $(x^2 + x + 1)^3 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)$ est 6.

2.3 Division polynômiale

2.3.1 Simplification de monômes

On simplifie un quotient de monômes en utilisant les propriétés des fractions et des exposants.

Exemple 11.

$$\frac{2x^5}{4x^3} = \frac{2}{4}x^{5-3} = \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{\sqrt{2}x^3}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}x^{3-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

Question 8

Simplifier les monômes suivants.

a) $\frac{3x^4}{6x^2}$ b) $\frac{\frac{2}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}$ c) $\frac{\sqrt{10}x^6}{\sqrt{5}x^2}$

2.4 Division polynomiale avec reste

Soit $P(x)$ et $D(x)$ des polynômes en x . On peut toujours trouver des polynômes $Q(x)$ (le quotient) et $R(x)$ (le reste), avec $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$ tels que

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

On peut écrire sous forme fractionnaire :

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Exemple 12.

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + 3x - 4 \quad | \quad x^2 - 1 \\ - x^3 + 3x - 4 \\ \hline - x^2 + 4x - 4 \\ - - x^2 + 1 \\ \hline + 4x - 3 \end{array}$$

$x-1$ reste $4x-5$

On a donc que

$$x^3 - x^2 + 3x - 4 = (x^2 - 1)(x - 1) + (4x - 5)$$

On peut aussi écrire ce résultat sous la forme suivante :

$$\frac{x^3 - x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = (x - 1) + \frac{4x - 5}{x^2 - 1}$$

Question 9

Effectuer les divisions polynomiales suivantes et écrire le résultat dans les deux formes possibles.

a) $\frac{x^3 - x - 1}{x + 1}$ b) $\frac{x^2 + 2x + 3}{x - 2}$ c) $\frac{x^3 + 1}{x + 1}$

Proposition 3. Si P et Q sont deux polynômes, le degré de leur quotient $\frac{P}{Q}$ est la différence de leur degrés.

3 Exercices supplémentaires

Question 10

Déterminer le degré des polynômes suivants.

a) $x^5 - 2x + 3$
 b) -1
 c) $10x$
 d) $-3x + 2$
 e) $(x^5 - 2x + 3)(x^2 + x + 1)$
 f) $(x^3 - x + 1)^2$
 g) $(x^5 - 2x + 3^3)$
 h) $\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$

Question 11

Simplifier les expressions polynomiales suivantes.

a) $3x^7 - 11x^7 + 5x^7$ d) $\frac{\frac{2}{3}x^5}{\frac{4}{5}x^2}$
 b) $\frac{3x^3}{2x^2}$ e) $\frac{\sqrt{2}x^5}{2x^3}$
 c) $\left(\frac{5x^3}{2}\right)\left(\frac{8x^4}{15}\right)$ f) $\frac{3x^2 - 2x^2}{5x^2}$

Question 12

Effectuer les opérations polynomiales suivantes.

a) $(x^3 + 6x - 8) + (-x^3 + 4x^2 + 3x - 11)$
 b) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{3}\right)$
 c) $(2x^3y + 5xy - 4x^3 + x^2y^2) + (xy^3 - x^2y^2 + 5x^3 - x + 10)$
 d) $(-x^3y - 7x^2y^2 - y^4 - 1) - (x^3y + 7x^2y^2 - y^4 + 17)$
 e) $\left(x^3 - \frac{1}{8}x + \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right)$
 f) $\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{5}xy + \frac{4}{3}x^2\right) - \left(\frac{4}{3}xy - \frac{2}{5}x^2 + \frac{5}{2}\right)$
 g) $(2x^3 + 1)(x - 2)(3x - 1)$
 h) $(x^2 + 1)^2$
 i) $(x - 2)^2$
 j) $(x - 2)^3$
 k) $(2x - 1)(3x + 2)(x - 7)$

Question 13

Effectuer les divisions polynomiales suivantes.

a) $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ g) $\frac{x^2 + 1}{x + 1}$
 b) $\frac{x^4 - 1}{x - 1}$ h) $\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}{x - 2}$
 c) $\frac{x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ i) $\frac{3x^2 + x^5 + x^3 + 47 - 28x}{x^3 - 1}$
 d) $\frac{x^5 + x^4 + x + 2}{x^3 - x + 1}$ j) $\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$
 e) $\frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$ k) $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x + 2}$
 f) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ l) $\frac{6x^4 - 7x^2 + 1}{2x^2 - 1}$

Solutions

Question 1

- a) $\frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$ est un polynôme
 b) $\frac{x^2+1}{5} = \frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$ est un polynôme
 c) $\frac{5}{x^2+1}$ n'est pas un polynôme
 d) $x^2 + x^3 - 5x^4$ est un polynôme
 e) $x^2 + \frac{x^3}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}x^4$ est un polynôme
 f) $\sqrt{\frac{x^3}{5}} - \sqrt{5}x^4$ n'est pas un polynôme

Question 2

- a) $\deg(1 + x + x^3 + x^5) = 5$
 b) $\deg(\pi + \sqrt{2}x + \frac{x^3}{5} + \frac{\sqrt{2}x^5}{22}) = 5$
 c) $\deg(x^3 - x^2) = 3$
 d) $\deg(5^3 - 5^2) = 0$

Question 3

- a) $7 - x + 3x^2 - x^6$
 b) $\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}x}{3} + x^2 + \frac{x^3}{5}$

Question 4

- a) $5x^2 + 3x^2 = (5+3)x^2 = 8x^2$
 b) $3x^4 - 5x^4 = (4-5)x^4 = (-1)x^4 = -x^4$
 c) $\frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{5} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)x^3 = \frac{11}{15}x^3 = \frac{11x^3}{15}$

Question 5

- a) $(x^3 + x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x - 3)$
 $= x^3 + 2x^2 - 2$
 b) $(2x^2 - 3x - 4) - (x^2 - 2x - 5) = x^2 - x + 1$
 c) $(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}) + (\frac{x^2}{3} - \frac{x}{4} - 1) = \frac{4x^2}{3} + \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$
 d) $(\sqrt{5}x^2 + 1) - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x^2 - x + 1\right)$
 $= \left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x^2 +$
 $= \frac{\sqrt{5}}{2}x^2 + x$

Question 6

- a) $x^3 x^5 = x^8$
 b) $\left(\frac{2x^3}{3}\right)\left(\frac{4x^5}{5}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} x^3 x^5 = \frac{8}{15} x^8$
 c) $(\sqrt{2}x^3)(\sqrt{6}x^5) = \sqrt{2} \sqrt{6} x^3 x^5$
 $= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3} x^8 = 2\sqrt{3} x^8$

Question 7

- a) $(x^2 + 1)(x + 2) = x^2(x + 2) + (1)(x + 2)$
 $= x^3 + 2x^2 + x + 2$
 b) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 + x^2 - x^2 - 1$
 $= x^4 - 1$
 c) $(x^2 - x + 2)(3x + 1)$
 $= x^2(3x + 1) - x(3x + 1) + 2(3x + 1)$
 $= (3x^3 + x^2) - (3x^2 + x) + (6x + 2)$
 $= 3x^3 - 2x^2 + 5x + 2$
 d) $\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right)$
 $= x^2\left(\frac{x}{2} - 1\right) - \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$
 $= \left(\frac{x^3}{2} - x^2\right) - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)$
 $= \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{1}{3}$
 $= \frac{x^3}{2} - \frac{5x^2}{4} + \frac{3x}{6} + \frac{x}{6} - \frac{1}{3}$
 $= \frac{x^3}{2} - \frac{5x^2}{4} + \frac{4x}{6} - \frac{1}{3}$
 $= \frac{x^3}{2} - \frac{5x^2}{4} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$

Question 8

- a) $\frac{1}{2}x^2$ b) $\frac{4}{3}x$ c) $\sqrt{2}x^4$

Question 9

- a) $x^3 - x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x+1 \\ -(x^3+x^2) \\ \hline -x^2-x-1 \\ -(-x^2-x) \\ \hline -1 \end{array} \right.$
 $x^3 - x - 1 = (x+1)(x^2 - x) - 1$
 $\frac{x^3 - x - 1}{x+1} = (x^2 - x) - \frac{1}{x+1}$
 b) $x^2 + 2x + 3 \quad \left| \begin{array}{l} x-2 \\ -(x^2-2x) \\ \hline 4x+3 \\ -(4x-8) \\ \hline 11 \end{array} \right.$
 $x^2 + 2x + 3 = (x-2)(x+4) + 11$
 $\frac{x^2 + 2x + 3}{x-2} = x + 4 + \frac{11}{x-2}$
 c) $x^3 + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x+1 \\ -(x^3+x^2) \\ \hline -x^2+1 \\ -(-x^2-x) \\ \hline x+1 \\ -(x+1) \\ \hline 0 \end{array} \right.$
 $x^3 + 1 = (x^2 - x + 1)(x + 1)$
 $\frac{x^3 + 1}{x+1} = x^2 - x + 1$

Question 10

- a) 5 c) 1 e) 7 g) 15
 b) 0 d) 1 f) 6 h) 3

Question 11

- a) $-3x^7$ c) $\frac{4x^7}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2$
 b) $\frac{3}{2}x$ d) $\frac{5x^3}{6}$ f) $\frac{1}{5}$

Question 12

- a) $4x^2 + 9x - 19$
 b) $\frac{7}{10}x^2 - \frac{1}{15}x + \frac{5}{12}$
 c) $2x^3y + 5xy + x^3 + xy^3 - x + 10$
 d) $-2x^3y - 14x^2y^2 - 18$
 e) $x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{24}x - \frac{7}{9}$
 f) $\frac{26}{15}x^2 - \frac{26}{15}xy - \frac{1}{6}$
 g) $6x^5 - 14x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 7x + 2$
 h) $x^4 + 2x^2 + 1$
 i) $x^2 - 4x + 4$
 j) $x^3 - 4x^2 + 12x - 8$
 k) $6x^3 - 41x^2 - 9x + 14$

Question 13

- a) $x^2 + x + 1$
 b) $x^3 + x^2 + x + 1$
 c) $x^2 + 3x - 1 + \frac{2}{x+1}$
 d) $x^2 + x + 1 + \frac{x+1}{x^3-x+1}$
 e) $2x - 3 - \frac{x-2}{x^2+1}$
 f) $x + 1$
 g) $x - 1 + \frac{2}{x+1}$
 h) $x^3 + x^2 - x - 1$
 i) $x^2 + 1 + \frac{4x^2 - 28x + 48}{x^3 - 1}$
 j) $x^3 + 2x + 1$
 k) $x^2 + x + 1$