Factorisation polynômiale

1 Forme factorisée

Définition. Un polynôme est sous forme **factorisée** s'il est écrit comme un produit de facteurs polynomiaux.

Exemple 1. Les polynômes suivants sont factorisés car ils sont des produits de facteurs polynômiaux.

$$(x-3)(x+2)(x-1)$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x+3)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$\left(x^2+3x+4\right)\left(5x^2+3x+1\right)$$

$$(x-1)^4(x+3)^5(x-2)$$

Les polynômes suivants ne sont pas factorisés car ils ne sont pas des produits de facteurs polynômiaux. Dans les deux cas, ce sont des sommes.

$$(x^2+2x+3)(x-4)+5$$

$$(x-3)^2(x-4)+(x+1)(x-3)$$

La factorisation d'un polynôme permet de résoudre certaines équations à l'aide du principe du produit nul.

Exemple 2.

$$\begin{aligned} x^3-3x^2-4x&=0\\ x(x-4)(x+1)&=0 \end{aligned}$$

Par le principe du produit nul, on doit avoir que $x=0$ ou $x=4$ ou $x=-1$.

2 Factorisation de base

2.1 Mise en évidence

Définition. La mise en évidence est l'utilisation de la distributivité du produit sur l'addition : on peut mettre en évidence un facteur commun aux termes d'une somme :

$$AB+AC=A(B+C)$$

$$AB+AC+AD=A(B+C+D)$$

etc.

Exemple 3.

$$\begin{aligned} x^2+2x^3+3x^4&=x^2\left(\frac{x^2+2x^3+3x^4}{x^2}\right)\\ &=x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x^3}{x^2}+\frac{3x^4}{x^2}\right)\\ &=x^2(1+2x+3x^2) \end{aligned}$$

Exemple 4.

$$\begin{aligned} 15x^4+6x^3&=3x^3\left(\frac{15x^4}{3x^3}+\frac{6x^3}{3x^3}\right)\\ &=3x^3(5x+2) \end{aligned}$$

Exemple 5.

$$3\sqrt{2}x^4+6\sqrt{2}x^3-9\sqrt{2}x^2=3\sqrt{2}x^2\left(x^2+2x-3\right)$$

Question 1
Factoriser les polynômes suivantes le plus possible à l'aide d'une mise en évidence.

a) $x^5+2x^4-3x^2$

b) $12x^6-4x^4-8x^2$

c) $\dfrac{2x^5}{5}-\dfrac{4x^3}{20}$

d) $6\sqrt{2}x^3+9\sqrt{2}x^2$

Question 2
Résoudre les équations suivantes en faisant une mise en évidence afin d'utiliser le principe du produit nul.

a) $x^5-x^4=0$

b) $8x^6-12x^5=0$

c) $\dfrac{x^3}{10}-\dfrac{2x}{5}=0$

2.2 Double mise en évidence

Définition. La double mise en évidence consiste à effectuer deux mise en évidence successives quand cela est possible.

$$\begin{aligned} AC+BC+AD+BD&=(A+B)C+(A+B)D\\ &=(A+B)(C+D). \end{aligned}$$

Exemple 6.

$$\begin{aligned} 2x^2+4x-3x-6&=2x(x+2)-3(x+2)\\ &=(2x-3)(x+2) \end{aligned}$$

Exemple 7.

$$\begin{aligned} 6x^2+9x+2x+3&=3x(2x+3)+(2x+3)\\ &=(3x+1)(2x-3) \end{aligned}$$

Note. Il faut porter une attention particulière aux signes lors de mise en évidence de nombres négatifs. Par exemple :

$$-6x+9=-3(2x-3)$$

$$-10x-5=-5(2x+1)$$

Pour éviter des erreurs de signes dans de telles situations, on peut simplement vérifier que la factorisation donne bien le bon résultat en multipliant les facteurs (en « défactorisant »)

$$-3(2x-3)=(-3)(2)x-(-3)(3)=-6x+9$$

$$-5(2x+1)=(-5)(2)x+(-5)(1)=-10x-5$$

Question 3
Factoriser les polynômes suivants à l'aide d'une double mise en évidence.

a) $3x^2 + x - 6x - 2$ b) $6x^2 - 15x - 4x + 10$

3 Identités algébriques

Une identité algébriques est une égalité algébrique qui est vraie peut importe la valeur donnée aux variables. Certaines identités permettent de factoriser.

3.1 Différences de carré

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

Exemple 8.
$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$$

Exemple 9.
$$9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$$

Note. Il est souvent utile de pouvoir repérer les carrés des nombres entiers pour factoriser à l'aide d'une différence de carré :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Cependant, les coefficients utilisés ne sont pas toujours le carré de nombres entiers. Il faut parfois repérer les carrés des formes suivantes : le carré d'une fraction et le carré d'une racine carrée :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

Exemple 10.
$$4x^2 - \frac{1}{25} = \left(2x - \frac{1}{5}\right)\left(2x + \frac{1}{5}\right)$$

Exemple 11.
$$x^2 - 7 = \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right)$$

Question 4
Factoriser à l'aide d'une différence de carré.

a) $x^2 - 81$
b) $16x^2 - 25$
c) $x^2 - 3$
d) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{9}{25}$

3.2 Trinôme carré parfait

> **Définition.** Un **trinôme carré parfait** est un trinôme de degré 2 de la forme
> $$A^2 + 2AB + B^2.$$

On peut factoriser un trinôme carré parfait à l'aide de l'identité algébrique suivante :

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Exemple 12.
$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

Exemple 13.
$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Exemple 14.
$$\frac{x^2}{4} + 5x + 25 = \left(\frac{x}{2} + 5\right)^2.$$

Question 5
Factoriser les polynômes suivants.

a) $x^2 + 14x + 49$
b) $9x^2 - 30x + 25$
c) $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$
d) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{4x}{15} + \dfrac{4}{25}$

4 Factorisation de polynômes de degré 2

Produit-somme 1

$$(x + u)(x + v) = x^2 + (u + v)x + (uv).$$

On peut donc factoriser un polynôme de degré 2

$$x^2 + x - 6$$

Produit $uv = -6$ et somme $u + v = 1$

u	v	$u + v$
1	−6	−5
−1	6	5
−2	3	1
3	−3	−1

$u = -2$ et $v = 3$.

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

Question 6
Factoriser les polynômes suivants.

a) $x^2 - 7x + 10$ b) $x^2 + x - 12$

Question 7
Résoudre les équations suivantes à l'aide du principe du produit nul.

a) $x^2 + x - 6 = 0$ b) $x^2 + 11x + 30 = 0$

Produit somme 2 On peut étendre la méthode de factorisation produit somme au cas où le coefficient de x^2 n'est pas 1.

$$\begin{aligned}(px+q)(sx+t) &= (px+q)sx+(px+q)t \\ &= psx^2+qsx+ptx+qt \\ &= psx^2+(qs+pt)x+qt \\ &= ax^2+bx+c\end{aligned}$$

Pour factoriser ax^2+bx+c, on veut deux nombres $u = qs$ et $v = pt$ tels que

$$uv = ax \text{ et } u+v = b.$$

Exemple 15. On factorise le polynôme

$$2x^2-3x-2$$

Produit $uv = 2(-2) = -4$ et somme $u+v = -3$

u	v	$u+v$
1	-4	-3
-1	4	3
2	-2	0
-2	2	0

On a donc $u = 1$ et $v = -4$. On factorise par double mise en évidence en écrivant $-3x$ comme $x-4x$:

$$\begin{aligned}2x^2-3x-2 &= 2x^2+x-4x-2 \\ &= x(2x+1)-2(2x+1) \\ &= (x-2)(2x+1).\end{aligned}$$

Question 8
Factoriser les polynômes suivants.

a) $2x^2-x-6$ b) $3x^2-17x+10$

5 Factorisation à partir de zéros connus

Si on connait les zéros d'un polynôme, on peut trouver ses facteurs : à chaque zéro z_0 correspond un facteur $x-z_0$ qui s'annule quand $x = z_0$.

Exemple 16. Factoriser x^2+x-56 sachant que 7 et -8 sont des zéros du polynôme.

On vérifie que 7 et -8 sont des zéros de x^2+x-56 :

$$(7)^2+(7)-56 = 49+7-56 = 0$$

$$(-8)^2+(-8)-56 = 64-8-56 = 0$$

On a que $x^2+x-56 = (x-7)(x-(-8)) = (x-7)(x+8)$.

Si z_1 et z_2 sont des zéros de ax^2+bx+c, alors

$$ax^2+bc+c = a(x-z_1)(x-z_2).$$

Exemple 17. On vérifie que 1 et 1/3 sont des solutions de l'équation

$$3x^2-4x+1 = 0 :$$

$$3(1)^2-4(1)+1 = 3-4+1 = 0$$

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^2-4\left(\frac{1}{3}\right)+1 = \frac{1}{3}-\frac{4}{3}+1 = 0$$

On a donc que

$$3x^2-4x+1 = a(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

Pour que l'égalité soit vraie, il faut que $a = 3$. On a donc la factorisation

$$3x^2-4x+1 = 3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

Question 9
Déterminer la factorisation de $2x^2+5x-12$ sachant que les zéros du polynôme sont -4 et $\frac{3}{2}$.

5.1 Formule quadratique

On peut trouver les solutions de l'équation

$$ax^2+bx+c = 0$$

à l'aide de la formule quadratique :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

On peut utiliser ces solutions pour factoriser certains polynômes de degré 2.

Exemple 18. Factoriser $2x^2-6x+4$ à l'aide de la formule quadratique.

Les zéros de $2x^2-6x+4$ sont

$$\begin{aligned}x &= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2-4(2)(4)}}{2(2)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{4} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} \\ &= \frac{6 \pm 2}{4} \\ &= \frac{8}{4} \text{ ou } \frac{4}{4} \\ &= 2 \text{ ou } 1\end{aligned}$$

On a donc la factorisation

$$2x^2-6x+4 = 2(x-1)(x-2).$$

Exemple 19. Factoriser $3x^2-4x-1$ à l'aide de la formule quadratique.

Les zéros de $3x^2-4x-1$ sont donnés par

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4(3)(-1)}}{2(3)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{6} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} \\ &= \frac{2(2 \pm \sqrt{7}}{6} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}. \end{aligned}$$

On a donc la factorisation

$$2x^2-6x+4 = 3\left(x-\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\right)\left(x-\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\right).$$

Question 10
Factoriser les polynômes suivants à l'aide de la formule quadratique.

a) $2x^2-3x-2$
b) $5x^2-4x-3$

6 Exercices supplémentaires

Question 11
Mettre en évidence les facteurs communs à chacun des termes.

a) x^3-4x^2
b) $3x^2-2x$
c) x^4-x^2
d) $x^2(x-1)-3(x-1)$
e) $x(2x+3)-4(2x+3)$
f) $-4x-8$
g) $-10x+5$

Question 12
Faire une double mise en évidence.

a) $x^2-3x+x-3$
b) $x^2-2x-9x+7$
c) $x^2-3x+x-3$
d) $x^2-5x-18x+10$

Question 13
Factoriser les polynômes suivants à l'aide de l'identité donnant la différence de carré.

a) x^2-64
b) $9-x^2$
c) $4x^2-9$
d) $49x^2-100$
e) $81-36x^2$
f) x^2-5
g) $3x^2-16^2$
h) $25x^2-10$
i) x^4-16
j) $9x^2-4$
k) $3x^2-4$
l) $\frac{x^2}{25}-4$
m) $x^2-\frac{1}{49}$
n) $\frac{x^2}{9}-\frac{25}{81}$
o) x^2-7
p) $3x^2-7$

Question 14
Factoriser les polynômes suivants à l'aide de l'identité pour un trinôme carré parfait.

a) x^2-4x+4
b) $x^2+10x+25$
c) $x^2-14x+49$
d) $4x^2+12x+9$
e) $36x^2+12x+1$
f) $9x^2-24x+16$

Question 15
Factoriser les polynômes suivants à l'aide de la technique produit-somme.

a) $x^2-2x+15$
b) x^2+5x+6
c) x^2-3x-4
d) $x^2+5x-25$
e) $x^2-10x+21$
f) $x^2-3x+28$
g) $2x^2+7x-4$
h) $4x^2-x-3$
i) $2x^2-7x-15$
j) $2x^2-13x+21$
k) $25x^2-20x+4$

Question 16
Déterminer la factorisation des polynômes suivants en utilisant les zéros donnés.

a) $x^2-8x+12$, zéros : 2 et 6
b) $x^2+3x-10$, zéros : 2 et -5
c) $2x^2-x-15$, zéros : $-\frac{2}{5}$ et 3
d) $3x^2-17x-6$, zéros : $-\frac{1}{3}$ et 6
e) $3x^2+2x-1$, zéros : $\frac{1}{3}$ et -1
f) $3x^2+2x-1$, zéros : $\frac{1}{3}$ et -1

Question 17
Déterminer la factorisation des polynômes suivants en trouvant les zéros à l'aide de la formule quadratique.

a) x^2-3x-4
b) $-x^2+x+2$
c) x^2-3
d) $2x^2-7x+3$
e) $-2x^2+5x-2$
f) $2x^2-2x-5$
g) $3x^2-5x+2$
h) $x^2-11x+28$
i) $5x^2+9x-2$
j) $-2x^2-4x+3$
k) $5x^2+9x-2$
l) $-3x^2-10x+8$
m) $2x^2-6$

Question 18
Factoriser le plus possible les polynômes suivants.

a) x^2+5x+6
b) x^2+2x+6
c) x^2-2x+1
d) $x^2+15x+56$
e) $4x^4-32x$
f) x^4+2x^2+1
g) x^4-2x^2+1
h) $9x^2+25$
i) $18x^5-32x^3$
j) x^7-8x^4
k) $27x^3-45x^2+12x$
l) $3x^3-108x$
m) $16x^4-81$
n) x^4-5x^2+4
o) $16x^2-81$
p) $6x^6-x^3-2$
q) $4x^2-16x+16-36$

Question 19
Factoriser les polynômes suivants le plus possible.

a) $9a^2+42a+49$
b) $9x^2+6xy+y^2$
c) a^3+a^2-42a
d) $16x^3+8bx^2+b^2x$
e) $9x^2z^4-4y^2$
f) $-3y^2 - 2xy + axy + 2ax^2$
g) $a^4+a^3+4a^2+32a$
h) $a^3+3a^2-4a-12$
i) $9x^2+64y^2$
j) xy^3+27x^4
k) $18a^5+32a^3$
l) $(a+b)^2-c^2$
m) x^2-y^2+x-y
n) $x^2+2xy+y^2-25$
o) $1-a^2-2ab-b^2$
p) a^3+b^3+a+b
q) x^3y^3-1

Solutions

Question 1

a) $x^5+2x^4-3x^2 = x^2\left(\frac{x^5}{x^2}+\frac{2x^4}{x^2}-\frac{3x^2}{x^2}\right) = x^2\left(x^3+2x^2-3\right)$

b) $12x^6-4x^4-8x^2 = 4x^2\left(\frac{12x^6}{4x^2}-\frac{4x^4}{4x^2}-\frac{8x^2}{4x^2}\right) = 4x^2\left(3x^4-x^2-2\right)$

c) $\frac{2x^5}{5}-\frac{4x^3}{15} = \frac{2x^3}{5}\left(\frac{2x^5/5}{2x^3/5}-\frac{4x^3/15}{2x^3/5}\right) = \frac{2x^3}{5}\left(\frac{2x^5}{5}\frac{5}{2x^3}-\frac{4x^3}{15}\frac{5}{2x^3}\right) = \frac{2x^3}{5}\left(x^2-\frac{2}{3}\right)$

d) $6\sqrt{2}x^3+9\sqrt{2}x^2 = 3\sqrt{2}x^2\left(\frac{6\sqrt{2}x^3}{3\sqrt{2}x^2}+\frac{9\sqrt{2}x^2}{3\sqrt{2}x^2}\right) = 3\sqrt{2}x^2(2x+3)$

Question 2

a) $x^5-x^4=0$
$x^4(x-1)=0$
$x=0$ ou $x=1$

b) $8x^6-12x^5=0$
$4x^5(2x-3)=0$
$x=0$ ou $x=\frac{3}{2}$

c) $\frac{x^3}{10}-\frac{2x}{5}=0$
$\frac{x}{5}(\frac{x^2}{2}-2)=0$
$x=0$ ou $\frac{x^2}{2}-2=0$
$x=0$ ou $\frac{x^2}{2}=2$
$x=0$ ou $x^2=4$
$x=0$ ou $x=2$ ou $x=-2$

Question 3

a) $3x^2+x-6x-2 = x(3x+1)-2(3x+1) = (3x+1)(x-2)$

b) $6x^2-15x-4x+10 = 3x(2x-5)-2(2x-5) = (2x-5)(3x-2)$

Question 4

a) $x^2-81=(x-9)(x+9)$
b) $4x^2-25=(4x-5)(4x+5)$
c) $x^2-3=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$
d) $\frac{x^2}{4}-\frac{9}{25}=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{5}\right)$

Question 5

a) $x^2+14x+49=(x+7)^2$
b) $9x^2-30x+25=(3x-5)^2$
c) $x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
d) $\frac{x^2}{9}-\frac{4x}{15}+\frac{4}{25}=\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{5}\right)^2$

Question 6

a) Produit $uv=10$ et somme $u+v=-7$

u	v	$u+v$
1	10	11
−1	−10	−11
2	5	7
−2	−5	−7

On a donc que $u=-2$ et $v=-5$. Ainsi, $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

b) Produit $uv=-12$ et somme $u+v=1$

u	v	$u+v$
1	−12	−11
−1	12	11
2	−6	−4
−2	6	4
3	−4	−1
−3	4	1

On a donc que $u=-3$ et $v=4$. Ainsi, $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$

Question 7

a) $x^2+x-6=0.$
$(x-2)(x+3)=0$
Par le principe du produit nul, on a que $x=2$ ou $x=-3$.

b) $x^2+11x+30=0.$
$(x+5)(x+6)=0$
Par le principe du produit nul, on a que $x=-5$ ou $x=-6$.

Question 8

a) On cherche des nombres u et v tels que $vu = 2(-6) = -12$ et $u+v = -1$.

u	v	$u+v$
1	−12	−11
−1	12	11
2	−6	−4
−2	6	4
−3	4	1
3	−4	−1

On a donc que $u = 3$ et $v = -4$.

$$\begin{aligned}2x^2 - x - 6 &= 2x^2 + 3x - 4x - 6\\ &= x(2x+3) - 2(2x+3)\\ &= (x-2)(2x+3).\end{aligned}$$

b) On cherche des nombres u et v tels que $vu = 3(10) = 30$ et $u+v = -17$.

u	v	$u+v$
1	30	31
−1	−30	−31
2	15	17
−2	−15	−17

On a donc que $u = -2$ et $v = -15$.

$$\begin{aligned}3x^2 - 17x + 10 &= 3x^2 - 2x - 15x + 10\\ &= x(2x-2) - 5(3x-2)\\ &= (x-5)(3x-2).\end{aligned}$$

Question 9

On sait que la factorisation doit avoir la forme suivante :

$$a(x+4)\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

Comme la valeur de a est le coefficient de x^2, on a que

$$2x^2 + 5x - 12 = 2(x+4)\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

Question 10

a) Les zéros de $2x^2 - 3x - 2$ sont

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}\\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}\\ &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}\\ &= \frac{3 \pm 5}{4}\\ &= \frac{-2}{4} \text{ ou } \frac{8}{4}\\ &= -\frac{1}{2} \text{ ou } 2\end{aligned}$$

La factorisation est donc

$$2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

b) Les zéros de $5x^2 - 2x - 4$ sont

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(5)(-4)}}{2(5)}\\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4+80}}{10}\\ &= \frac{2 \pm \sqrt{84}}{10}\\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{21}}{10}\\ &= \frac{2\left(1 \pm \sqrt{21}\right)}{10}\\ &= \frac{1 \pm \sqrt{21}}{5}\end{aligned}$$

La factorisation est donc

$$2x^2 - 3x - 2 = 5\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{21}}{5}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1-\sqrt{21}}{5}\right)\right).$$

Question 11

a) $x^2(x-4)$

b) $x(3x-2)$

c) $x^2(x^2-1)$

d) $\left(x^2-3\right)(x-1)$

e) $(x-4)(2x+3)$

f) $(-4)(x+2)$

g) $(-5)(2x-1)$

Question 12

a) $(x+1)(x-3)$

b) $(2x-7)(x-1)$

c) $(x+1)(x-3)$

d) $(9x-5)(x-2)$

Question 13

a) $(x-8)(x+8)$

b) $(3-x)(3+x)$

c) $(2x-3)(2x+3)$

d) $(7x-10)(7x+10)$

e) $(9-6x)(8+6x)$

f) $\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$

g) $\left(\sqrt{3}x-4\right)\left(\sqrt{3}x+4\right)$

h) $\left(5-\sqrt{10}\right)\left(5x+\sqrt{10}\right)$

i) $\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

j) $(3x-2)(3x+2)$

k) $(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)$

l) $\left(\frac{x}{5}-2\right)\left(\frac{x}{5}+2\right)$

m) $\left(x-\frac{1}{7}\right)\left(x+\frac{1}{7}\right)$

n) $\left(\frac{x}{3}-\frac{5}{9}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{5}{9}\right)$

o) $\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)$

p) $\left(\sqrt{3}x-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{7}\right)$

Question 14

a) $(x-2)^2$

b) $(x+5)^2$

c) $(x-7)^2$

d) $(2x+3)^2$

e) $(6x+1)^2$

f) $(3x-4)^2$

Question 15

a) $(x-3)(x+5)$

b) $(x+2)(x+3)$

c) $(x+1)(x-4)$

d) $(x-3)(x+8)$

e) $(x-3)(x+7)$

f) $(x-7)(x+4)$

g) $(2x-1)(x+4)$

h) $(4x+3)(x-1)$

i) $(x-5)(2x+3)$

j) $(x-3)(2x-7)$

k) $(5x-2)^2$

Question 16

a) $(x-2)(x-6)$

b) $(x-2)(x+5)$

c) $2\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-3)$

d) $3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-6)$

e) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)$

f) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)$

Question 17

a) $(x+1)(x-4)$

b) $-(x+1)(x-2)$

c) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$

d) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)$

e) $-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$

f) $2\left(x-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

g) $3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)$

h) $(x-4)(x-7)$

i) $5\left(x-\frac{1}{5}\right)(x+2)$

j) $-2\left(x-\left(\frac{-1-\sqrt{10}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{2}\right)\right)$

k) $3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x+1)$

l) $-3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+4)$

m) $2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$

Question 18

a) $(x+2)(x+3)$

b) x^2+2x+6

c) $(x-1)^2$

d) $(x+8)(x+7)$

e) $4x(x-2)(x^2+2x+4)$

f) $(x^2+1)^2$

g) $(x-1)^2(x+1)^2$

h) $9x^2+25$

i) $2x^3(3x+4)(3x-4)$

j) $x^4(x-2)(x^2+2x+4)$

k) $x(3x-1)(3x-4)$

l) $3x(x-6)(x+6)$

m) $(4x^2+9)(2x-3)(2x+3)$

n) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

o) $(4x-9)(4x+9)$

p) $(3x^3-2)(2x^3+1)$

q) $(2x-4)^2-36=(2x-4-6)(2x-4+6)=$
$(2x-10)(2x+2)$

Question 19

a) $(3a+7)^2$

b) $(3x+y)^2$

c) $a(a+7)(a-6)$

d) $x(4x+b)^2$

e) $(3xz^2-2y)(3xz^2+2y)$

f) $(2x+3y)(ax-y)$

g) $a(a^3+a^2+4a+32)$

h) $(a+3)(a+2)(a-2)$

i) $9x^2+64y^2$

j) $x(y+3x)(y^2-3xy+9x^2)$

k) $2a^3(9a^2+16)$

l) $(a+b+c)(a+b-c)$

m) $(x-y)(x+y+1)$

n) $(x+y+5)(x+y-5)$

o) $(1-a-b)(1+a+b)$

p) $(a+b)(a^2-ab+b^2+1)$

q) $(xy-1)(x^2y^2+xy+1)$