Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep St-Laurent
Calcul intégral — 201-NYB — Hiver 2020

Formatif 2

L'usage de la calculatrice est interdit pendant l'examen et aucune documentation est permise.

Conseil : tenter de répondre au plus grand nombre de question possible sans regarder les solutions.

Question 1 (18 points)
Soit la fonction définie par $f(x) = x^2$.

a) Écrire, sans l'évaluer, la somme d'aire de rectangles (somme de Riemann) qui approxime l'aire sous $f(x)$ comprise entre $x = 0$ et $x = 1$ quand on prend 10 rectangles et que l'on prend comme hauteur le côté droit des rectangles. Faire un dessin pour illustrer.

b) Écrire ce que vaut l'aire exacte de la région donnée en a) selon la définition de l'intégrale définie, sans évaluer les sommes et les limites.

c) Déterminer l'aire exacte sous $f(x)$ entre $x = 0$ et $x = 1$.

Question 2 (80 points)
Calculer les intégrales suivantes. Indiquez quand vous utilisez le théorème fondamental du calcul dans vos raisonnement.

a) $\displaystyle\int (x^2-1)\mathrm{e}^{3x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \cos^7\left(\frac{x}{2}\right)dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\sec^6(3x)}{\sqrt[5]{\tan(3x)}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int \sin(2x)e^x\,dx$

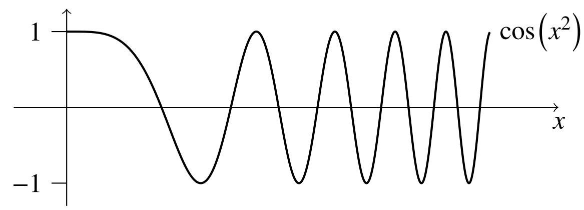
h) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(x))^2}{x}\,dx$

Question 3 (20 points)
Évaluer les aires (positives) suivantes. Représenter graphiquement les régions données.

a) Aire de la région comprise entre la courbe d'équation $y = x^2$, les droites $y = 1$ et $y = 4$ et l'axe des y.

b) Aire de la région comprise entre les courbes d'équation $y = \mathrm{e}^x$ et $y = 2\mathrm{e}^x$, l'axe des y et la droite $x = \ln(3)$.

Question 4 (16 points)
Soit $A(x) = \int_0^x \cos\left(x^2\right)dx$. (Note : $\cos\left(x^2\right)$ est une fonction sans primitive exprimable à l'aide des fonctions « élémentaires ».)



a) Utiliser le théorème fondamental du calcul pour déterminer $A'(x)$ quand

$$A(x) = \int_0^x \cos\left(x^2\right)dx.$$

b) En utilisant résultat précédant, déterminer la valeur de $x \geq 0$ où $A(x)$ a sont premier maximum. (Rappel : les valeurs critiques d'une fonction $f(x)$ sont les valeurs de x où la tangente à f est horizontale ou n'existe pas.)

c) Soit $B(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^x \cos\left(x^2\right)dx$. La fonction $B(x)$ est définie comme $A(x)$ mais en intégrant à partir de $\pi/2$ à x au lieu de 0 à x.
Montrer que $A'(x) = B'(x)$ en utilisant le théorème fondamental du calcul.

d) Comme $A(x)$ et $B(x)$ ont la même dérivée, elles doivent être égales à une constante près. Montrer que cette constante est

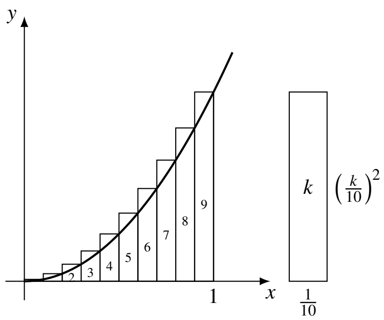
$$\int_0^{\pi/2} \cos\left(x^2\right)dx$$

et interpréter le résultat géométriquement.

Solutions

Question 1

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{k}{10}\right)^2\frac{1}{10}$



b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$

c)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n^3(1+1/n)(2+1/n)}{6}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6}\\
&= \frac{2}{6}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Question 2

a) En utilisant deux fois l'intégration par parties, on trouve :

$$\int (x^2-1)\mathrm{e}^{3x}\,dx = \frac{\left(9x^2-6x-7\right)\mathrm{e}^{3x}}{27}+C$$

b) En utilisant le changement de variable $u=\sin(x)$ la primitive

$$\int \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}\,dx = \mathrm{e}^{\sin(x)}+C$$

On utilise cette primitive pour évaluer l'intégrale définie :

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}\,dx &\overset{\text{TF}}{=} \mathrm{e}^{\sin(x)}\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3}\\
&= \mathrm{e}^{\sin(2\pi/3)}-\mathrm{e}^{\sin(\pi/3)}\\
&= \mathrm{e}^{\sqrt{3}/2}-\mathrm{e}^{\sqrt{3}/2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

c) Changement de variable avec l'identité $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ et $u=\sin(x/2)$ et $2du=\cos(x/2)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int\cos^7\left(\frac{x}{2}\right)dx &= \int\cos^6\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx\\
&= \int\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx\\
&= \int\left(1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx\\
&= 2\int\left(1-u^2\right)^3\,du\\
&= 2\int 1-3u^2+3u^4-u^6\,du\\
&= 2\left(u-u^3+\frac{3u^5}{5}-\frac{u^7}{7}\right)+C\\
&= 2u-2u^3+\frac{6u^5}{5}-\frac{2u^7}{7}+C\\
&= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\\
&\quad+\frac{6}{5}\sin^5\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{7}\sin^7\left(\frac{x}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

d) Utiliser $u=\tan(3x)$ et $du=3\sec^2(3x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sec^6(3x)}{\sqrt[5]{\tan(3x)}}\,dx &= \int\frac{\sec^4(3x)}{\sqrt[5]{\tan(3x)}}\sec^2(3x)\,dx\\
&= \int\frac{\left(\tan^2(3x)+1\right)^2}{\sqrt[5]{\tan(3x)}}\sec^2(3x)\,dx\\
&= \int\frac{\left(u^2+1\right)^2}{\sqrt[5]{u}}\,\frac{du}{3}\\
&= \frac{1}{3}\int\frac{u^4+2u^2+1}{\sqrt[5]{u}}\,dx\\
&= \frac{1}{3}\int u^{19/5}+2u^{9/5}+u^{-1/5}\,dx\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{5u^{24/5}}{24}+\frac{10u^{14/5}}{14}+\frac{5u^{4/5}}{4}\right)+C\\
&= \frac{5\sqrt[5]{\tan^{24}(3x)}}{72}+\frac{5\sqrt[5]{\tan^{14}(3x)}}{21}\\
&\quad+\frac{5\sqrt[5]{\tan^{4}(3x)}}{12}+C
\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &\overset{\text{TF}}{=} \arcsin(1)-\arcsin(0)\\
&= \pi/2-0\\
&= \pi/2
\end{aligned}$$

f) Utiliser les identités trigonométrique pour $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$.

$$\begin{aligned}
\int\cos^2(x)\sin^2(x)\,dx &= \int\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right)dx\\
&= \frac{1}{4}\int(1+\cos(2x))(1-\cos(2x))\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int 1-\cos^2(2x)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int\sin^2(2x)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)dx\\
&= \frac{1}{8}\int 1-\cos(4x)\,dx\\
&= \frac{1}{8}\left(x-\frac{\sin(4x)}{4}\right)+C\\
&= \frac{x}{8}-\frac{\sin(4x)}{32}+C
\end{aligned}$$

g) Utiliser deux fois l'intégration par parties et la « passe du I ».

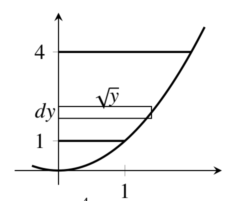
$$\int\sin(2x)e^x\,dx = -\frac{2}{5}\cos(2x)e^x+\frac{1}{5}e^x\sin(2x)+C$$

h) Changement de variable $u=\ln(x)$, $du=\frac{1}{x}dx$:

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{(\ln(x))}{x}\,dx = \int_0^1 u^2\,dx \overset{\text{TF}}{=} \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

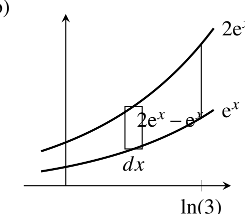
Question 3

a)



$$\begin{aligned}
A &= \int_1^4\sqrt{y}\,dy\\
&\overset{\text{TF}}{=} \frac{2y^{3/2}}{3}\Big|_1^4\\
&\overset{\text{TF}}{=} \frac{2(4)^{3/2}}{3}-\frac{2(1)^{3/2}}{3}\\
&= \frac{2(2)^3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}
\end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\ln(3)}2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\,dx\\
&= \int_0^{\ln(3)}\mathrm{e}^x\,dx\\
&= \mathrm{e}^x\Big|_0^{\ln(3)}\\
&= \mathrm{e}^{\ln(3)}-\mathrm{e}^0\\
&= 3-1=2
\end{aligned}$$

Question 4

a) Par le théorème fondamental, $A'(x)=\cos\left(x^2\right)$.

b) Comme la première solution positive de $\cos(x)=0$ est $x=\pi/2$, la première solution positive de $A'(x)=\cos\left(x^2\right)=0$ est $x^2=\pi/2 \iff x=\sqrt{\pi/2}$.

c) Par le théorème fondamental, $B'(x)=\cos\left(x^2\right)$, ce qui est exactement $A'(x)$.

d) Si on suppose que la constante C est telle que $A(x)=B(x)+C$, elle doit être égale à différence entre $A(x)$ et $B(x)$:

$$\begin{aligned}
A(x)-B(x) &= \int_0^x\cos\left(x^2\right)dx-\int_{\pi/2}^x\cos\left(x^2\right)dx\\
&= \int_0^{\pi/2}\cos\left(x^2\right)dx.
\end{aligned}$$

Cette constante est la différence entre les aires définissant $A(x)$ et $B(x)$.