Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de St-Laurent
Calcul intégral — 201-NYB — Hiver 2020

Formatif 1

Ceci est un ancien examen pour vous permettre de vous préparer au premier examen de mon cours. Notes : l'examen dure 2h20, aucune documentation n'est permise et l'usage de calculateurs électroniques est interdit. Conseil : tentez de faire ce formatif dans les mêmes conditions que l'examen.

Question 1
Évaluer les limites suivantes. Indiquer quand vous utiliser la règle de l'Hospital.

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{e^{(x^2-1)}-1}$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-x+5}$

c) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^2 \ln(x-1)$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(x^2\right)^{1/x}$

e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$

Question 2
Montrer que si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors

$$\int \frac{f(x)}{\sqrt{F(x)}}\,dx = 2\sqrt{F(x)} + C.$$

Question 3
Répondre brièvement aux questions suivantes ; ne pas justifier vos réponses.

a) Donner un exemple d'une limite où la règle de l'Hospital ne peut pas être utilisée.

b) Donner deux exemples de limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

telles que sont toutes deux des formes indéterminées « ∞/∞ », mais où la limite de $f_1(x)/g_1(x)$ donne 0 et la limite de $f_2(x)/g_2(x)$ donne ∞.

c) Donner deux primitives différentes de la fonction $y = x^2$.

Question 4
Évaluer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} + 1\right)^2 dx$

b) $\displaystyle\int \cos(x) e^{\sin(x)}\,dx$

c) $\displaystyle\int x \sec\left(x^2-1\right) \tan\left(x^2-1\right) dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2+x+2}{x+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{2x\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Question 5
Considérons la somme

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2.$$

a) Développer la somme donnée en donnant les trois premiers termes et les deux derniers termes.

b) Déterminer la valeur de cette somme en fonction de n à l'aide des propriétés des sommes et des formules de sommations connues. (il n'est pas nécessaire de simplifier)

c) Déterminer la valeur de la somme si on y ajoute un terme supplémentaire correspondant à $k = 0$, sans utiliser les formules de sommations, mais en utilisant plutôt le résultat trouvé en b) :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2.$$

Solutions

Question 1

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{e^{(x^2-1)}-1}=\frac{0}{0}\text{ FI}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{e^{(x^2-1)}-1} &\overset{\text{RH}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2x}{2xe^{(x^2-1)}}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{1}{e^{(x^2-1)}}\\ &=\frac{1}{e^{(1^2-1)}}\\ &=1\end{aligned}$$

b) Ce n'est pas une forme indéterminée.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-x+5}=\frac{0}{15}=0$$

c)

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^2\ln(x-1)=0\cdot(-\infty)\text{ FI}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}(x-1)^2\ln(x-1) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{1/(x-1)^2}\text{ FI }\frac{\infty}{\infty}\\ &\overset{\text{RH}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{1/(x-1)}{-2/(x-1)^3}\\ &=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\,\frac{(x-1)^3}{-2}\\ &=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{-2}\\ &=0\end{aligned}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\right)^{1/x}=\infty^0\text{ FI}$$

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\right)^{1/x}\\ \ln(L)&=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(x^2\right)^{1/x}\right)\\ &=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(x^2\right)^{1/x}\right)\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(x^2\right)\text{ FI }0\infty\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\text{ FI }\frac{\infty}{\infty}\\ &\overset{RH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}2x}{1}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\\ &=0\end{aligned}$$

Comme $\ln(L)=0$, la limite cherchée est donc $L=e^0=1$

e)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{1}{0^+}-\frac{1}{\sin(0^+)}=\infty-\infty\text{ FI}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}\text{ FI }\frac{0}{0}\\ &\overset{RH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}\text{ FI }\frac{0}{0}\\ &\overset{RH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}\\ &=\frac{0}{2}\\ &=0\end{aligned}$$

Question 2

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{F(x)}+C\right)' &= \frac{2}{2\sqrt{F(x)}}F'(x)\\ &=\frac{1}{\sqrt{F(x)}}f(x)\\ &=\frac{f(x)}{\sqrt{F(x)}}\end{aligned}$$

Question 3

a)

$$\lim_{x\to 3}x$$

(car pas une forme indéterminée 0/0 ou ∞/∞)

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=0\text{ et }\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\infty$$

c)

$$\frac{x^3}{3}\text{ et }\frac{x^3}{3}+2$$

Question 4

a) Il faut développer le carré avant d'intégrer. Aucun changement de variable est nécessaire. Le résultat final est

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}+1\right)^2dx=\frac{10}{3}\sqrt[5]{x^3}+5\sqrt[5]{x}+x+C.$$

b) Utiliser le changement de variable $u=\sin(x)$, ce qui implique que $du=\cos(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int\cos(x)e^{\sin(x)}\,dx&=\int e^u\,du\\ &=e^u+C\\ &=e^{\sin(x)}+C.\end{aligned}$$

c) Utiliser le changement de variable $u=x^2-1$, ce qui implique que $du=2x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int x\sec\left(x^2-1\right)\tan\left(x^2-1\right)dx&=\int\sec(u)\tan(u)\,\frac{1}{2}\,du\\ &=\frac{\sec(u)}{2}+C\\ &=\frac{\sec(x^2-1)}{2}+C.\end{aligned}$$

d) Ind. Diviser les polynômes pour simplifier et utiliser le changement de variable $u=x+1$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3-x^2+x+2}{x+1}\,dx&=\int x^2-2x+3-\frac{1}{x+1}\,dx\\ &=\int x^2-2x+3\,dx-\int\frac{1}{x+1}\,dx\\ &=\int x^2-2x+3\,dx-\int\frac{1}{u}\,du\\ &=\frac{x^3}{3}-x^2+3x-\ln(|u|)+C\\ &=\frac{x^3}{3}-x^2+3x-\ln(|x+1|)+C.\end{aligned}$$

e) Utiliser le changement de variable $u=2x$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{2x\sqrt{4x^2-1}}\,dx&=\int\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,dx\\ &=\frac{\operatorname{asec}(u)}{2}+C\\ &=\frac{\operatorname{asec}(2x)}{2}+C.\end{aligned}$$

f) Changement de variable $u=x-1$, donc $du=dx$ et $x=u+1$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx&=\int\frac{u+1}{\sqrt{u}}\,du\\ &=\int u^{1/2}+u^{-1/2}\,du\\ &=\frac{u^{3/2}}{3/2}+2u^{1/2}+C\\ &=\frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3}+2\sqrt{x-1}+C.\end{aligned}$$

Question 5

a)

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2=$$

$$4+9+16+\cdots+((n-1)+1)^2+(n+1)^2$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2&=\sum_{k=1}^{n}k^2+2x+1\\ &=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}+n\end{aligned}$$

c) Le terme correspondant à $k=0$ est $(0+1)^2=1$. Il suffit donc d'ajouter cette valeur à la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}+n+1$$