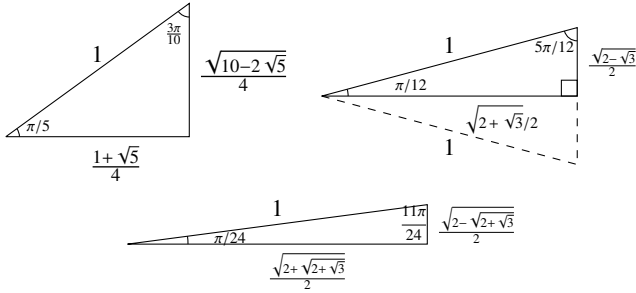


Examen formatif 4

Vous pouvez utiliser les mesures des triangles suivants sans démonstration.



Question 1

Vrai ou faux ?

(Il n'est pas nécessaire de donner de démarche pour cette question.)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$
- $(b^{f(x)})' = (b^{f(x)})' f'(x)$
- $(b^x)' = x b^{x-1}$
- La fonction $\ln(x)$ a une asymptote verticale en $x = 1$.
- $\arccos(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$

Question 2

Évaluer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sec(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3 - e^{-x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9)$

Question 3

Déterminer l'équation de la droite tangente au point $(\pi/3, f(\pi/3))$ du graphe de la fonction

$$f(x) = \sin(x) \cos(x).$$

Question 4

Évaluer les dérivées suivantes.

- $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2) + \pi^x + e^\pi$
- $f(x) = \sin^3\left(\frac{x}{2}\right) + e^{x^2}$
- $f(x) = \sec(x^2 + 1) + \operatorname{arcsec}(x^2 + 1)$
- $f'(0)$ si $f(x) = \sin(x^2) + \sin^2(x) + 2^{\sin(x)}$
- $f'(25\pi/24)$ si $f(x) = \operatorname{cotan}(x)$.

Question 5

Sachant que la dérivée de $\tan(x)$ est $\sec^2(x)$, utiliser l'identité $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$ pour déterminer la dérivée de $\sec(x)$.

Question 6

Déterminer pour quelle valeur de $x \in [0, 2\pi]$ la différence $\sin(x) - \cos(x)$ est maximale et déterminer cette différence.

Question 7

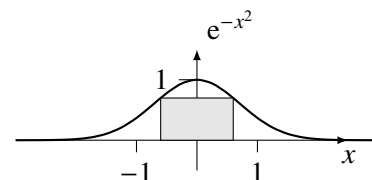
Faire le tableau de variation de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

Déterminer le domaine, les valeurs critiques, les minimums, les maximums, les points d'inflexion, les asymptotes, et esquisser la fonction. (Ind. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$)

Question 8

Voici le graphe de l'équation $y = e^{-x^2}$:



Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale inscrit entre la courbe et l'axe des x et symétrique par rapport à l'axe des y (dont la base va de $-x$ à x).

Solutions

Question 1

- a) Vrai
 b) Faux (Mauvaise utilisation de la règle de chaîne : $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ et non $(f(g(x)))' g'(x)$)
 c) Faux (La formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ s'applique aux puissances de x et non aux fonctions exponentielles)
 d) Faux (L'unique AV est en $x = 0$, $\ln(x)$ a un zéro en $x = 1$)
 e) Faux (Ne pas confondre la fonction réciproque de \cos et l'inverse de $\cos(\theta)$.)

Question 2

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sec(x) &= \sec\left(\frac{\pi}{2}^+\right) \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^+\right)} \\ &= \frac{1}{0^-} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3 - e^{-x}} &= \frac{2}{3 - e^{-\infty}} \\ &= \frac{2}{3 - 0} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 9) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln((x-3)(x+3)) \\ &= \ln((3^+ - 3)(3^+ + 3)) \\ &= \ln((0^+)(6)) \\ &= \ln(0^+) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Question 3

$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. La pente est
 $a = f'(\pi/3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

$f(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $y = ax + b$ donc $b = y - ax = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$.
 L'équation de la droite est

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$$

Question 4

a) $f'(x) = \frac{1}{1/x} \left(\frac{1}{x}\right)' + 0 + \pi^x \ln(\pi) + 0 = -x^{-2} + \pi^x \ln(\pi) = -\frac{1}{x^2} + \pi^x \ln(\pi)$

b) $\frac{3}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2xe^{-x^2}$

c) $2x \sec(x^2 + 1) \tan(x^2 + 1) + \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2-1}}$

d) $f'(x) = 2x \cos(x^2) + 2 \sin(x) \cos(x) + 2^{\sin(x)} \ln(2) \cos(x)$
 $f'(0) = 2(0) \cos(0^2) + 2 \sin(0) \cos(0) + 2^{\sin(0)} \cos(0) \ln(2) = 0 + 2(0)(1) + 2^0(1) \ln(2) = \ln(2)$

e) $f'(x) = -\csc^2(x)$, et donc

$$f'(25\pi/24) = -\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}}\right)^2 = -\frac{4}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Question 5

Dériver l'identité $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$:

$$2 \tan(x) \sec^2(x) = 2 \sec(x) (\sec(x))'$$

En isolant $(\sec(x))'$, on obtient

$$(\sec(x))' = \frac{2 \tan(x) \sec^2(x)}{2 \sec(x)} = \sec(x) \tan(x)$$

Autre possibilité :

$$\begin{aligned} \tan^2(x) + 1 &= \sec^2(x) \\ \sec(x) &= \sqrt{\tan^2(x) + 1} \\ (\sec(x))' &= \left(\sqrt{\tan^2(x) + 1}\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\tan^2(x) + 1}} (2 \tan(x) \sec^2(x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tan^2(x) + 1}} (\tan(x) \sec^2(x)) \\ &= \frac{1}{\sec(x)} (\tan(x) \sec^2(x)) \\ &= \sec(x) \tan(x) \end{aligned}$$

Question 6

$f(x) = \sin(x) - \cos(x)$. $f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 $f''(x) = 0$ ssi

$$\cos(x) + \sin(x) = 0$$

$$\cos(x) = -\sin(x)$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -1$$

$$\tan(x) = -1$$

$$x = 3\pi/4 \text{ ou } 7\pi/4$$

On vérifie pour laquelle de ces valeurs critiques on a un maximum. La dérivée seconde est
 $f''(x) = -\sin(x) + \cos(x)$.

En $x = 3\pi/4$ on a que $f''(3\pi/4) = -\sin(3\pi/4) + \cos(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2} < 0$. Comme la dérivée seconde est négative en $3\pi/4$, on a un maximum en $x = 3\pi/4$.

En $x = 7\pi/4$ on a que $f''(7\pi/4) = -\sin(7\pi/4) + \cos(7\pi/4) = -\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Comme la dérivée seconde est positive en $7\pi/4$, on a un minimum en $x = 7\pi/4$.

La différence la plus grande est donc quand $x = 3\pi/4$. Elle vaut $\sin(3\pi/4) - \cos(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$

Question 7

Dérivées :

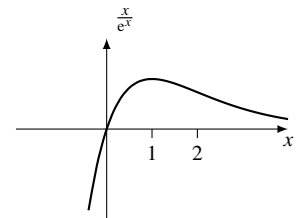
$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{(1-x)}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-1-(1-x))}{e^{2x}} = \frac{(x-2)}{e^x}$$

Pas d'AV car $e^x > 0$.

AH : les limites nécessaires sont données.

x	∞	$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{-}$	∞
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	\curvearrowright MAX	\curvearrowleft INF	0



Question 8

$$A(x) = 2xe^{-x^2}$$

$$A'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$$A'(x) = 0 \text{ si } (1-2x^2) = 0 \text{ ssi } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A''(x) = 4x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$$

$$\text{En } x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} A''(1/\sqrt{2}) &= 4 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\right) e^{-(1/\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) e^{-1/2} \\ &= (+)(-)(+) < 0 \end{aligned}$$

et similairement $A''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$. On a donc un maximum quand $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'aire maximum est donc

$$2 \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2e}}$$