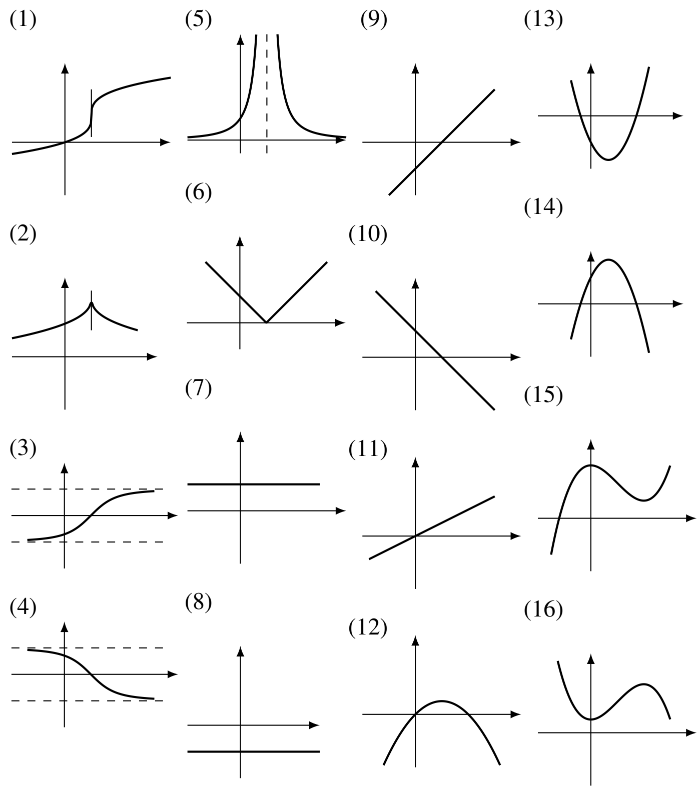
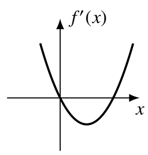
Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Calcul différentiel — 201-NYA — Automne 2020

Examen formatif 3

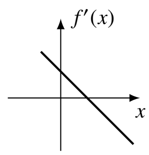
Question 1
Répondre aux questions suivantes en choisissant un des graphiques (1) à (16). Aucune justification n'est demandée.



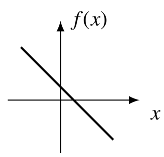
a) Si $f'(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f(x)$?



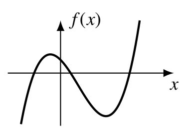
b) Si $f'(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f(x)$?



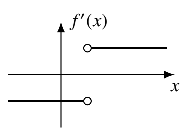
c) Si $f(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f'(x)$?



d) Si $f(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f'(x)$?



e) Si $f'(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f(x)$?



f) Quelle fonction correspond au tableau de signe suivant ?

x	$-\infty$		1		∞
$f'(x)$		$+$	$\nexists$	$+$	
$f''(x)$		$+$	$\nexists$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		1		∞

g) Quel est le graphe de $f'(x)$ si $f(x)$ a une tangente verticale ?

h) Quel est le graphe de la fonction où $f'(x) = -1$ pour tout x ?

i) Quel est le graphe de la fonction telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$?

j) Quel est le graphe de la fonction telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = -1$ et $f'(0) = -1$?

k) Quel est le graphe de la fonction telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$?

Question 2
Esquissez la fonction dont le tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		4		5		∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2				-4				3				0				2

Question 3
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-1)^2-(x-1)$

Question 4

Vrai ou faux ?

a) Si $f'(a) = 0$ alors f a un maximum ou un minimum en $x = a$.

b) Si $f(x)$ est une fonction polynômiale de degré 5, f peut avoir au plus 4 minimums ou maximums.

c) Si $f''(x) > 0$ sur $[-2, \sqrt{5}]$, alors f est croissante sur $[-2, \sqrt{5}]$

d) Une fonction peut être à la fois concave vers le haut et décroissante.

e) Si $f'(a) > 0$, alors $f''(a) > 0$.

Question 5

Déterminer le domaine, les valeurs critiques de la dérivée première, les minimums et les maximums et faire une esquisse de la fonction définie par

$$f(x) = x\sqrt{2 - x^2}.$$

Question 6

Faire l'analyse de la concavité de la fonction

$$f(x) = 2x + \sqrt[3]{(1-x)^5}.$$

Déterminer les valeurs critiques de f'', les points d'inflexions et faire une esquisse de la fonction basée sur ces données.

Question 7

Faire l'analyse complète des deux fonctions suivantes. Étudier la croissance, la concavité, les maximums, minimums, les points d'inflexion, et les asymptotes. Faire l'esquisse de la fonction.

a) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$

Question 8

Trouver le point de la droite $y = x$ qui est le plus près du point $(2, 1)$.

Question 9

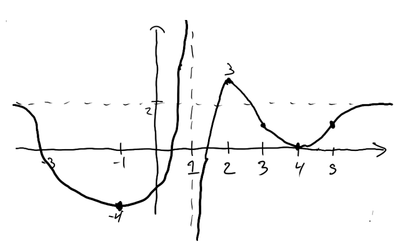
On créé un piste de course de 400 m dont l'intérieur consiste en un rectangle ayant un demi-cercle à chacun de ses bouts. Si on veut maximiser la superficie du rectangle à l'intérieur de la piste, quelles doivent être ses dimensions ?

Solutions

Question 1

a) 15	e) 6	i) 4
b) 14	f) 1	j) 10
c) 8	g) 5	k) 16
d) 13	h) 10	

Question 2



Question 3

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{8}{0^-} = -\infty$

b) C'est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-4} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\left(1-\frac{4}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\left(1-\frac{4}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\left(1-\frac{4}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\left(1-\frac{4}{x}\right)} \\
&= -\frac{\sqrt{1+\frac{4}{(-\infty)}^2}}{\left(1-\frac{4}{-\infty}\right)} \\
&= -\frac{1}{(1)} \\
&= -1
\end{aligned}$$

c) (Forme $\infty - \infty$) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x-1)^2 - (x-1) = \lim_{x\to\infty} (x-1)((x-1)-1) = \infty \cdot \infty = \infty$ (autre possibilité : commencer par développer $(x-1)^2$)

Question 4

a) Faux

b) Vrai

c) Faux (elle est concave vers le haut)

d) Vrai (par exemple x^2 est concave vers le haut et décroissante pour $x < 0$)

e) Faux

Question 5

Le domaine de la fonction est $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Après simplification, la dérivée de la fonction est

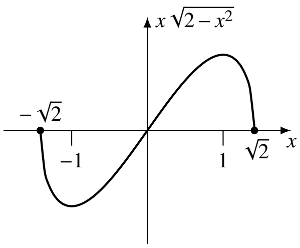
$$f'(x) = -\frac{2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Ses valeurs critiques sont

- $f'(x) = 0$ en $x = -1$ et $x = 1$
- $f'(x)\nexists$ (et bouts !) en $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Tableau de variation :

x	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
$f'(x)$	$\nexists$	-	0	+	0	-	$\nexists$



Question 6

$f'(x) = 2 - \frac{5}{3}\sqrt[3]{(1-x)^2}$

$$f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{1-x}}$$

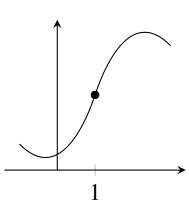
La seule valeur critique de f'' est $x = 1$, où $f''(x)\nexists$.

Le tableau des signes de f'' :

x		1	
$f''(x)$	+	$\nexists$	-

La fonction est donc concave vers le haut sur $]-\infty, 1[$, concave vers le bas sur $]1, \infty[$, et elle a un point d'inflexion en $x = 1$.

Une esquisse possible :



Question 7

a) Comme f est une fonction polynomiale, elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

A.H.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3 = \infty$$

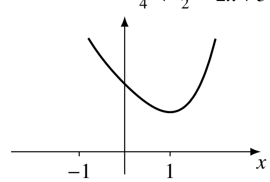
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3 = \infty$$

A.V. : Il n'y a pas de division par zéro, donc pas d'asymptotes verticales.

$f'(x) = (x^2+x+2)(x-1)$; le seul point critique de f' est $x = 1$.

$f''(x) = 3x^2 + 1$; f'' n'a aucun point critique.

x	$-\infty$		1		∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f''(x)$		+	+	+	
$f(x)$	∞	$\searrow$	Min	$\nearrow$	∞



b) Domaine de f : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$f'(x) = -\frac{4(x-\frac{1}{2})}{(x-2)^3}$

Points critiques : $f'(x) = 0$ si $x = 1/2$, $f'(x)\nexists$ si $x = 2$.

$$f''(x) = \frac{8(x+\frac{1}{4})}{(x-2)^4}.$$

Points critiques : $f''(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{4}$; $f''(x)\nexists$ si $x = 2$.

A.H.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^2} = 1$$

La droite $y = 1$ est une A.H.

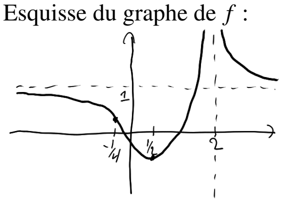
A.V.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{(x-2)^2} = \infty$$

(les limites $x \to 2^+$ et $x \to 2^-$ donnent le même résultat.)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		2		∞
$f'(x)$		-	-	-	0	+	$\nexists$	-	
$f''(x)$		-	0	+	+	+	$\nexists$	+	
$f(x)$	1	$\searrow$	INF	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	∞	$\searrow$	1

Esquisse du graphe de f :



Question 8

Soit (x, y) un point sur la droite donnée. La distance entre $(2, 1)$ et (x, y) est

$$d = \sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}.$$

Comme $y = x$, on trouve que

$$d(x) = \sqrt{(2-x)^2 + (1-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 5}.$$

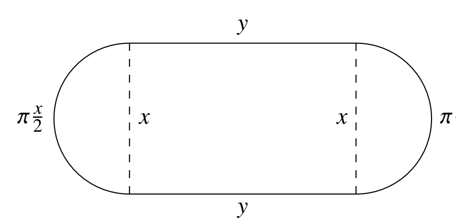
On minimise $d(x)$.

$$d'(x) = \frac{2(2x-3)}{2\sqrt{2x^2-6x+5}}.$$

La dérivée est nulle en $x = \frac{3}{2}$. On vérifie avec un tableau de signes qu'on a bien un minimum en $x = \frac{3}{2}$.

Question 9

Appelons x la largeur du rectangle central et y sa longueur ; x est aussi le diamètre des demi-cercles à chacun des bouts de la piste.



Le périmètre total est

$$\pi x + 2y = 400$$

et la superficie du rectangle est $A = xy$.

On trouve donc que $y = \dfrac{400 - \pi x}{2}$ et que

$$A = x\frac{400 - \pi x}{2} = 200x - \frac{\pi}{2}x^2$$

On veut maximiser A. En dérivant, on trouve

$$A' = 200 - \pi x.$$

On a que $A' = 0$ si et seulement si $x = \frac{200}{\pi}$.

On vérifie que l'on a bien un maximum à l'aide du test de la dérivée seconde. Comme $A'' = -\pi$, la dérivée seconde est toujours négative et on a un maximum.

Les dimensions du rectangle sont $x = \frac{200}{\pi}$ et $y = 100$.