Examen 4 (formatif)

Problème 1 Déterminer une valeur exacte de a.

a) $a = \sin \frac{7\pi}{6}$

b) $a = \csc(-\pi/4)$

c) $a = \arctan 1$

d) $\frac{-1}{2} = \cos a$

e) $2^{a+2} = 25\%$

f) $\log_3(a+2) = 2$

g) $a = \lim_{x\to(-\pi/2)^+} \tan(x)$

h) $a = \lim_{x\to+\infty} 3^{-x} + 3$

Problème 2 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \sin(3x+1)$

b) $b(x) = \cos^2(-x)$

c) $c(x) = x\tan(x)$

d) $d(x) = \cot(\pi x)$

e) $e(x) = e^{\sin(4x)}$

f) $f(x) = \operatorname{arccsc}(x)$

g) $g(x) = \ln(\arcsin(2x))$

h) $h(x) = \arctan(4^x)$

Problème 3 Calculer la dérivée de $f(x) = (\sin x)^x$ à l'aide de la dérivée logarithmique.

Problème 4 En supposant que x et y satisfont l'équation implicite

$$x\cos y = ye^x,$$

calculer $y' = \frac{dy}{dx}$ via la dérivation implicite.

Problème 5 Soit la fonction $f(x) = \ln(1+2x^2)$. Pour cet exercice, il est utile de se rappeler des propriétés graphiques de $\ln x$.

a) Expliquer pourquoi $f(x)$ existe pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

b) f possède un unique zéro. Lequel ?

c) Montrer que $f(x)$ est toujours positive.

d) Étudier la croissance de f à l'aide d'un tableau de signe et déterminer ses extremums relatifs. (Indice : $f'(x) = \frac{4x}{2x^2+1}$; à justifier.)

e) Étudier la courbure de f à l'aide d'un tableau de signe et déterminer ses points d'inflexion. (Indice : $f''(x) = \frac{4-8x^2}{(2x^2+1)^2}$; à justifier.)

Problème 6 Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2}$

a) Faire l'étude complète de signe, croissance, concavité et asymptotes de cette fonction puis tracer une esquisse de son graphique.

b) Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire entre l'axe des x et la courbe de f.

Réponses

1. (a) $a = 1/2$
   (b) $a = -\sqrt{2}$
   (c) $a = \pi/4$
   (d) $a = 2\pi/3$
   (e) $a = -4$
   (f) $a = 7$
   (g) $a = -\infty$
   (h) $a = 3$

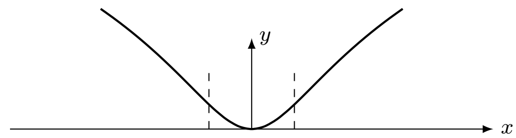
2. (a) $a'(x) = 3\cos(3x+1)$
   (b) $b'(x) = 2\sin(-x)\cos(-x) = -2\sin(x)\cos(x)$
   (c) $c'(x) = \tan(x) + x\sec^2(x)$
   (d) $d'(x) = -\pi\csc^2(\pi x)$
   (e) $e'(x) = 4\cos(4x)e^{\sin(4x)}$
   (f) $f'(x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
   (g) $g'(x) = \dfrac{2}{(1-4x^2)\arcsin(2x)}$
   (h) $h'(x) = \dfrac{\ln(4)4^x}{1+4^{2x}}$

3. $(\sin(x))^x\,(x\cot(x) + \ln(\sin(x)))$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos(y) - e^x y}{x\sin(y) + e^x}$

5. (a) Le logarithme existe lorsque son argument est strictement positif ; mais puisque x^2 est positif, $1 + 2x^2$ est strictement positif.
   (b) Le logarithme vaut 0 lorsque son argument vaut 1 ; on a $\ln(1+2x^2) = 0 \iff 1+2x^2 = 1 \iff 2x^2 = 0 \iff x = 0$.
   (c) Le logarithme (de base > 1) est positif lorsque son argument est ≥ 1; on a $\ln(1+2x^2) \geq 1 \iff 1+2x^2 \geq 1 \iff 2x^2 \geq 0$, ce qui est vrai pour toutes les valeurs de x.

   Alternativement, on a vérifié ci-dessus que f ne possède qu'un seul zéro en $x = 0$; il suffit donc de vérifier son signe est positif pour une valeur $x < 0$ ainsi qu'une valeur $x > 0$ (tableau de signe).
   (d) f est décroissante de $-\infty$ à 0, puis croissante. Elle possède donc un minimum en $x = 0$.
   (e) f est convexe de $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et concave ailleurs. Elle possède donc un point d'inflexion en $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

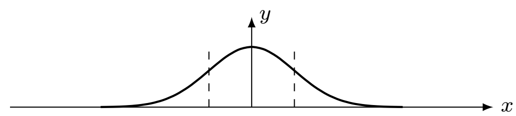


6. (a) f est strictement positive partout car c'est une fonction exponentielle.

   f ne possède pas d'asymptote verticale car son domaine est $\mathbb{R}$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{\mp\infty} = 1/\infty = 0$, donc f possède une asymptote horizontale $y = 0$ à gauche et à droite.

   $f'(x) = -2xf(x)$ possède un unique zéro (point critique de f) en $x = 0$; f est croissante ($f'(x) > 0$) lorsque $x < 0$, et f est décroissante ($f'(x) < 0$) lorsque $x > 0$.

   $f''(x) = 2(2x^2-1)f(x)$ possède deux zéros (points d'inflexion de f) en $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; f est concave entre ces deux points et convexe ailleurs.



   (b) Pour l'optimisation, si la base du rectangle est $2x$, alors sa hauteur est $y = f(x) = e^{-x^2}$. L'aire du rectangle est $A(x) = \textit{base} \times \textit{hauteur} = 2xe^{-x^2} = -f'(x)$, donc $A'(x) = -f''(x) = 2(1-2x^2)e^{-x^2}$ (déjà calculé au problème précédent). Donc le point critique positif est $x = 1/\sqrt{2}$, et c'est un maximum (tableau de signe ou test de la dérivée seconde, $A''(1/\sqrt{2}) < 0$). Les dimensions du rectangle sont donc $\sqrt{2} \times e^{-1/2}$.