Professeur : Alex Provost 201-NYA-05

Examen 2 (formatif)

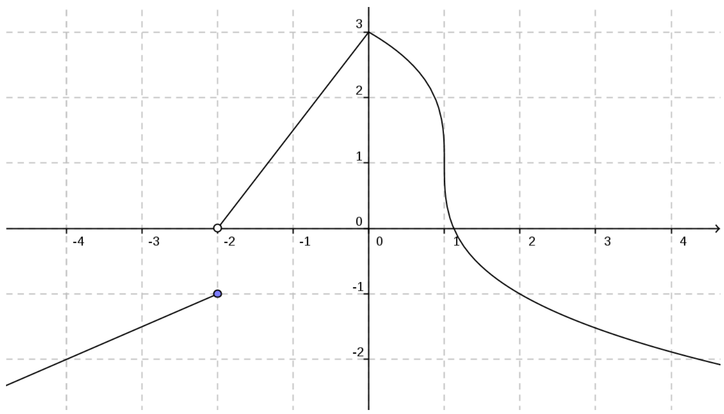
Problème 1 Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

a) Calculer $\mathrm{TVM}_{[x,x+h]}\, f$.

b) Calculer la limite lorsque $h \to 0$ du taux de variation moyen trouvé en a). (Indice : multiplier par le conjugué.)

c) Comparer avec la dérivée $f'(x)$ calculée avec les techniques vues en cours.

Problème 2 Soit la fonction f dont le graphe est affiché ci-dessous. Faire une esquisse du graphe de sa fonction dérivée f', et trouver les points où f n'est pas dérivable.



Problème 3 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $a(x) = (1-7x)^6$

b) $b(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x} - \dfrac{2\sqrt{x^5}}{5}$

c) $c(x) = [(x^2-5)^8 + x^7]^{18}$

d) $d(x) = 9\sqrt{2+\sqrt{x}}$

e) $e(x) = x^4 \sqrt[7]{\dfrac{x+1}{x-1}}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)^2}}$

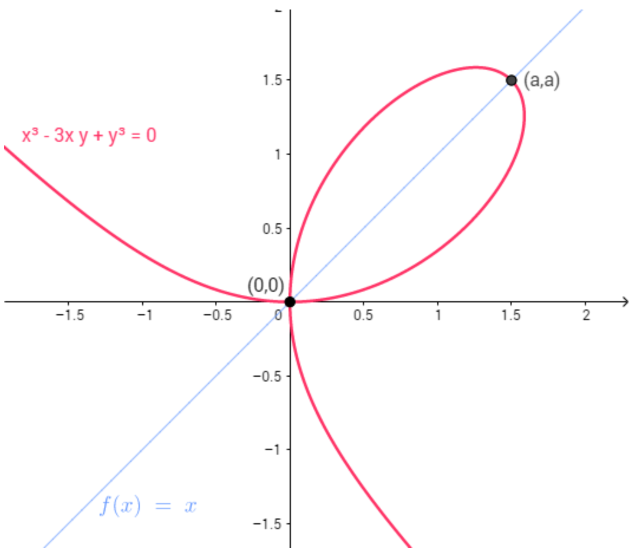
Problème 4 Calculer :

a) $f^{(5)}(x)$ et $f^{(100)}(x)$ si $f(x) = x^5 - x^3 + 7x^2$

b) Le temps t où la vitesse d'une particule atteint sa valeur maximale, si la position de la particule en fonction du temps est donnée par $x(t) = \dfrac{-t^3}{4} + \dfrac{3t^2}{4}$.

Problème 5 Le *folium de Descartes* est la courbe du plan définie par l'équation implicite

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$



a) Calculer $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Déterminer l'équation de la droite tangente au folium à l'unique point de la forme (a, a), où $a \neq 0$. (Trouver d'abord les coordonnées de ce point algébriquement en posant $x = y = a$ dans l'équation implicite.)

c) Déterminer les points différents de l'origine où la droite tangente au folium est soit verticale ou horizontale.

Problème 6 L'équation d'état de van der Waals pour un gaz est donnée par

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT,$$

où V, P et T désignent respectivement le volume, la pression et la température ; a, n, b et R sont des constantes qui dépendent de la nature du gaz.
En supposant que la pression est constante, calculer le taux de variation instantané du volume du gaz en fonction de la température. (On cherche donc $\frac{dV}{dT}$.)

Problème 7 Démontrer que si f est dérivable, alors

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

directement à l'aide de la définition de la dérivée et des propriétés des limites. (Vous n'avez pas le droit d'invoquer la règle de dérivation en chaîne.)

Réponses

1. (a) $\mathrm{TVM}_{[x,x+h]}\, f = \dfrac{\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{h}$
   (b) $\lim_{h\to 0} \mathrm{TVM}_{[x,x+h]}\, f = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
   (c) Par dérivation en chaine on trouve $f'(x) = ((x^2+1)^{1/2})' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, ce qui coïncide avec la limite ci-dessus.

2. Le graphe de la dérivée a les propriétés suivantes : il est strictement positif et constant sur $(-\infty, -2)$; encore plus positif mais toujours constant sur $(-2, 0)$; strictement négatif et descend vers $-\infty$ sur $(0,1)$; part de $-\infty$ et remonte sur $(1, \infty)$. Donc f n'est pas dérivable seulement en $x = -2$ (f discontinue), $x = 0$ (pic), $x = 1$ (dérivée infinie).

3. (a) $a'(x) = 42(-1+7x)^5$
   (b) $b'(x) = -(2 + \sqrt{x} + 2x\sqrt{x^5})/(2x^2)$
   (c) $c'(x) = 18(7x^6 + 16x(x^2-5)^7)(x^7 + (x^2-5)^8)^{17}$
   (d) $d'(x) = 9/(4\sqrt{2\sqrt{x}+x})$
   (e) $e'(x) = \dfrac{2x^3(14x^2 - x - 14)}{7(x-1)^2} \sqrt[7]{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^6}$
   (f) $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{3x^3} \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x}}$

4. (a) $f^{(5)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, $f^{(100)}(x) = 0$.
   (b) La vitesse en fonction du temps est donnée par $x'(t) = -3t^2/4 + 3t/2$. Cette parabole atteint son maximum en $t = -b/2a = -(3/2)/(-3/2) = 1$.

5. (a) $dy/dx = (x^2 - y)/(x - y^2)$.
   (b) En posant $x = y = a$ on a $2a^3 = 3a^2$, et puisque $a \neq 0$ ceci implique que $a = 3/2$. On trouve $dy/dx = -1$ en $(x,y) = (3/2, 3/2)$. Donc la droite tangente est $y = -(x-3/2)+3/2 = -x+3$.
   (c) La droite tangente est horizontale lorsque $0 = dy/dx = (x^2-y)/(x-y^2) \iff 0 = x^2 - y \iff y = x^2$. On remplace dans l'équation implicite pour obtenir $x^3 + x^6 = 3x^3$, ce qui implique que $x = \sqrt[3]{2}$ puisque $x \neq 0$. Le point cherché est donc $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Un argument symétrique donne que le point où la tangente est verticale est $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

6. $dV/dT = \dfrac{nR}{P + an^2/V^2 - 2an^2(V-nb)/V^3}$

7. $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \dfrac{1}{(\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)})} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.