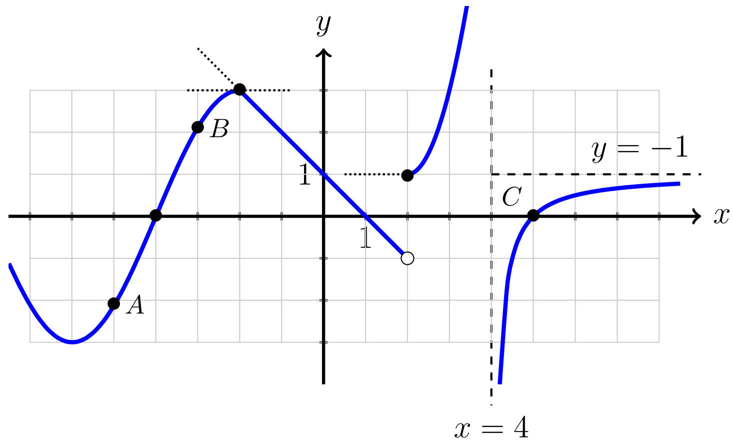
Examen 3 (formatif)

Problème 1 Considérons la fonction f dont le graphe est illustré ci-dessous.



a) Déterminer le signe des fonctions dérivées f' et f'' aux points A, B et C.

b) Trouver les valeurs de x où f possède un extremum relatif.

c) Quel est l'unique point d'inflexion de la fonction f ?

d) Déterminer le domaine de la fonction dérivée f'.

e) Est-il juste d'affirmer que $f''(x) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$? Justifier.

Problème 2 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x(x+2)}$.

a) Déterminer le domaine de f.

b) À l'aide d'un tableau, faire l'étude du signe de f sur son domaine.

Problème 3 Étudier la croissance de la fonction $f(x) = \sqrt{2x}(1-x)$ et déterminer tous ses extremums relatifs.

Problème 4 Étudier la concavité de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+2)^2}$ et déterminer tous ses points d'inflexion.

Problème 5 Faire une étude complète de la fonction $f(x) = \dfrac{8(x+1)}{x^2}$:

a) Étude du domaine et du signe.

b) Asymptotes verticales et horizontales.

c) Croissance et extremum(s) relatif(s). (Indice : $f'(x) = \dfrac{-8(x+2)}{x^3}$; à justifier.)

d) Concavité et point(s) d'inflexion(s). (Indice : $f''(x) = \dfrac{16(x+3)}{x^4}$; à justifier.)

e) Esquisse détaillée du graphe de f.

Problème 6 Trouver la hauteur h du cylindre de volume maximal que l'on peut inscrire dans un cône circulaire droit de hauteur 12 et de rayon de la base 7.

Problème 7 On modifie un enclos rectangulaire en remplaçant l'un des quatre côtés par un demi-cercle. Si le périmètre souhaité de l'enclos est un nombre $P > 0$ fixé, trouver les dimensions de l'enclos qui maximisent son aire totale.

Réponses

1)
   (a) $f'(-5) \geq 0$, $f''(-5) \geq 0$, $f'(-3) \geq 0$, $f''(-3) \leq 0$, $f'(5) \geq 0$, $f''(5) \leq 0$.
   (b) $x = -6, -2$.
   (c) $x = -4$.
   (d) $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2, 4\}$.
   (e) Oui, car f est une droite sur ce segment, et une droite est à la fois concave vers le haut et vers le bas. Ou bien : la pente de la droite tangente à une droite est constante ; ainsi la dérivée de cette pente est zéro partout. (Algébriquement : $\frac{d^2}{dx^2}(mx+b) = \frac{d}{dx}(m) = 0$.)

2)
   (a) $D(f) = [-3, \infty) \setminus \{-2, 0\}$.
   (b) f est positive sur $[-3, -2) \cup (0, \infty)$ et négative sur $(-2, 0)$.

3) On trouve $f'(x) = \frac{1-3x}{\sqrt{2x}}$. f est croissante sur $[0, \frac{1}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{3}, \infty)$. Elle possède un minimum relatif en $x = 0$ et un maximum relatif en $x = 1/3$.

4) On trouve $f''(x) = \frac{-8(x-1)}{(x+2)^4}$. f est concave vers le haut lorsque $x \leq 1$ et concave vers le bas lorsque $x \geq 1$. Elle possède un seul point d'inflexion, en $x = 1$.

5)
   (a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f est négative lorsque $x \leq -1$ et positive lorsque $x \geq -1$ (sauf en $x = 0$ où elle n'existe pas).
   (b) AV en $x = 0$ avec $\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = +\infty$. AH en $y = 0$ avec $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.
   (c) f est décroissante sur $(-\infty, -2] \cup (0, \infty)$ et croissante sur $[-2, 0)$. Minimum relatif en $x = -2$.
   (d) f est concave vers le bas lorsque $x \leq -3$ et concave vers le haut lorsque $x \geq -3$. Point d'inflexion en $x = -3$.
   (e) Laissé à votre discrétion.

6) Soient r, h le rayon et la hauteur du cylindre. Par la propriété des triangles semblables, on a la contrainte $\frac{12}{7} = \frac{h}{7-r}$. Le volume à maximiser est donc $V(h) = \pi r^2 h = \pi 7^2 (1 - \frac{h}{12})^2 h$. (Utiliser la contrainte.) Les points critiques sont $h = 4, 12$. Le maximum est en $h = 4$. (Faire un tableau.)

7) Soient r le rayon du demi-cercle et y la longueur des deux côtés parallèles de l'enclos. On a la contrainte $P = 2r + 2y + \pi r$. L'aire à maximiser est donc $A(r) = 2ry + \frac{\pi r^2}{2} = Pr - (2 + \frac{\pi}{2})r^2$. (Utiliser la contrainte.) L'unique point critique est $r = \frac{P}{4+\pi}$, et c'est un maximum. (Faire un tableau, ou test de la dérivée seconde : $A''(r) = -2(2 + \frac{\pi}{2}) < 0$.)