Mise à niveau — Hiver 2017
Département de mathématiques — Cégep St-Laurent

Les fractions

1 Notion de fraction

Une *fraction* représente une partie d'un tout par un rapport de nombres entiers. C'est une expression de la forme

$$\frac{a}{b},$$

comme 2/3, 1/2, 5/4, etc, où a et b sont des nombres entiers. Dans la fraction a/b a est appelé le **numérateur** et b est appelé le **dénominateur**.

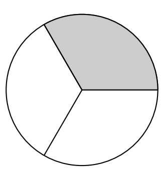
Définition 1. *Une fraction de la forme* $1/b$ *représente la part d'un tout que l'on obtient en le divisant en* b *parties égales.*

La fraction a/b *représente la quantité obtenue en prenant* a *parts de taille* $1/b$.

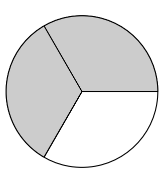
La fraction $1/2$ représente la moitié d'un tout. Le numérateur « 1 » représente le nombre de parts que l'on a et le dénominateur « 2 » représente quelle fraction du tout représente une part. Ainsi, la fraction $\frac{5}{3}$ représente une quantité de 5 part d'un tiers chacune.

1.1 Représentations graphique

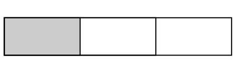
Il est utile de garder en tête une représentation graphique des fractions. Cette représentation, mentale ou dessinée, permet de mieux comprendre les différentes propriétés des fractions. Une représentation fréquente est l'utilisation de « pointes de tartes » ou en encore de « pointes de pizza ». Par exemple chaque « pointe » de ce cercle (que vous pouvez imaginer comme de la tarte ou de la pizza selon vos goûts) représente une part d'un tiers $1/3$ du tout.



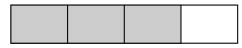
Si on a deux parts de $1/3$, on a $2/3$:



On peut aussi représenter les fractions comme les parties d'une longueur. Par exemple, $1/3$ représenté comme une longueur :



La fraction $3/4$:

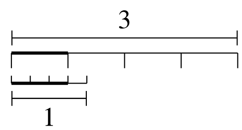


Si les représentations les plus utilisées utilisent l'aire de figures, on peut aussi représenter des fractions de longueurs : la fraction $3/4$:

Une fraction comme $3/4$ peut être lue comme « un quart de 3 » ou « 3 quarts »

$$\frac{1}{4}3 = \frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Les deux lectures sont valables car elles donnent le même résultats :



Si cette notation fractionnaire vous est familière, ses propriétés le sont probablement moins. C'est les nombreuses propriétés des fractions qui ont fait qu'elles ont été adoptés et ont remplacé les différentes autres notations qui ont existé avant l'introduction de cette notation. Les fractions modernes donnent une grande souplesse pour manipuler les rapports qu'elles représentent, mais du même coup sont plus difficile à maitriser. Comme dans un jeu : des règles plus complexes peuvent donner un jeu plus intéressant, mais il sera plus difficile à apprendre à y jouer !

2 Hypothèses algébriques

Pour pouvoir manipuler algébriquement les fractions, il nous faut connaitre certaines propriétés de cette notation. Dans ce qui suit, certaines propriétés sont des hypothèses (énoncés supposés vrais) car elles peuvent être motivées par des considérations géométriques ou parce qu'elles sont équivalentes à nos définitions. D'autres propriétés seront déduites de ces hypothèses.

Hypothèse 1. *Comme la fraction* a/b *représente la quantité obtenue en prenant* a *parts de taille* $1/b$*, on peut toujours réécrire* $\frac{a}{b}$ *comme* $a\frac{1}{b}$.

$$\frac{a}{b} \stackrel{def}{=} a\frac{1}{b}.$$

Hypothèse 2. *Si on prend* a *parts d'un tout divisé en* a *morceaux, on retrouve le tout en entier :*

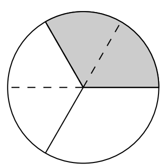
$$\frac{a}{a} = a\frac{1}{a} = 1.$$

Un cas particulier important : si on prend un tout et on le divise en une seule part, on obtient le tout en entier. En notation factionnaire, cela est exprimé de la manière suivante :
Propriété 1.
$$\frac{1}{1} = 1$$

Si on prend aucune part d'un tout, peut importe en combien de part on divise le tout, on obtient zéro. L'hypothèse 1 nous donne une propriété cohérente avec cette intuition :
Propriété 2.
$$\frac{0}{a} = 0\frac{1}{a} = 0$$

3 Subdiviser les parts

Si on a $1/3$ de tarte que nous divisons en deux, on obtient des parts de taille $1/6$:
$$\frac{1/3}{2} = \frac{1}{6}.$$



En général, si on prend une part d'un tout divisé en a parts, et que l'on divise cette part en b parts, on obtient une part d'un tout divisé en ab parts. Avec la notation fractionnaire, cela s'écrit :
Hypothèse 3.
$$\frac{1}{a}\frac{1}{b} = \frac{1/a}{b} = \frac{1}{ab}.$$

On fait aussi l'hypothèse que les fractions sont des nombres comme les autres, et ont toutes les propriétés algébriques usuelles des nombres entiers.
Hypothèse 4. *Les propriétés générales de l'addition et de la multiplication*

a) *La commutativité de l'addition et de la multiplication est aussi valable pour les fractions :*
$$a + \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + a,$$
$$a\frac{b}{c} = \frac{b}{c}a,$$
pour n'importe quel nombre a.

b) *Les nombres* 0 *et* 1 *ont le même effet sur les fractions que sur les nombres entiers :*
$$(0)\frac{a}{b} = 0,$$
$$(1)\frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

c) *La distributivité est valable pour les fractions :*
$$a\left(\frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{c_2}\right) = a\frac{b_1}{c_1} + a\frac{b_2}{c_2} = \frac{ab_1}{c_1} + \frac{ab_2}{c_2}.$$

4 Propriétés algébriques des fractions

4.1 Division par zéro

À cause de l'hypothèse 2, on ne peut donner un sens à des expression comme $2/0$ ou $3/0$. Si c'était le cas, on devrait avoir
$$(0)\frac{1}{0} = 1$$
par la propriété précédente. Mais comme multiplier un nombre par zéro donne toujours zéro, on devrait aussi avoir que
$$(0)\frac{1}{0} = 0.$$

Comme $1/0$ ne peut valoir à la fois 1 et 0, on voit qu'il est impossible de donner un sens cohérent à l'expression » $1/0$ ».

Si on considère $a/0$ avec un nombre a autre que 1, le problème reste le même car
$$\frac{a}{0} = a\frac{1}{0}$$
qui ne peut pas être défini. C'est pourquoi il est impossible de diviser par zéro.
Propriété 3. *Pour n'importe quel nombre a, l'expression* $\frac{a}{0}$ *n'est pas définie.*

4.2 Inverses

Comme prendre a part de taille $\frac{1}{a}$ est la seule manière de prendre des parts égales obtenir le tout en entier, si en prenant a parts de taille b on obtient le tout, on doit avoir que $b = \frac{1}{a}$.
Hypothèse 5. *L'inverse d'un nombre est unique : si* $ab = 1$*, alors b est l'inverse de a :*
$$ab = 1 \implies b = \frac{1}{a}.$$

Propriété 4. *L'inverse d'un inverse d'un nombre est le nombre lui-même :*
$$\frac{1}{1/a} = a.$$

Démonstration.
$$a\frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$
Par l'hypothèse 5, l'inverse de $\frac{1}{a}$ est donc a. □

Propriété 5.
$$\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}$$
.

Démonstration.
$$\frac{a}{b}\frac{b}{a} = a\frac{1}{b}b\frac{1}{a} = a\frac{1}{a}b\frac{1}{b} = \frac{a}{a}\frac{b}{b} = (1)(1) = 1.$$
Par l'hypothèse 5, l'inverse de $\frac{a}{b}$ est donc $\frac{b}{a}$. □

5 Addition et soustraction de fractions 1 : parts de taille égales

Commençons par l'addition. Si on additionne des parts de taille égales, l'addition des nombres de parts est simple : il suffit d'en faire le total. Par exemple, cinq part d'un sixième plus une autre part d'un sixième donne six part d'un sixième, ou la totalité.

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Nous utilisons tous cette propriété quand on pense en quart d'heure : si on attend un quart d'heure et un autre quart d'heure, on a attendu une demie heure :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}.$$

Hypothèse 6.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

6 Simplification

Propriété 6. *On peut simplifier un facteur commun au numérateur et au dénominateur d'une faction :*

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$$

On indique habituellement que l'on simplifie un facteur de la manière suivante :

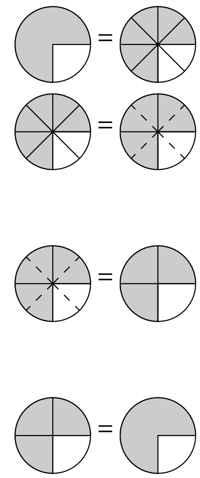
$$\frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}}=\frac{a}{b}$$

On peut vérifier que cette égalité à partie des hypothèses et propositions précédentes :

$$\begin{aligned}
\frac{ac}{bc} &= ac\frac{1}{bc} && \text{(par hyp. 1)}\\
&= ac\frac{1}{b}\frac{1}{c}\frac{1}{c} && \text{(par hyp. 3)}\\
&= a\frac{1}{b}c\frac{1}{c} && \text{(par hyp. 4)}\\
&= a\frac{1}{b}(1) && \text{(par hyp. 2)}\\
&= a\frac{1}{b} && \text{(par hyp. 4)}\\
&= \frac{a}{b} && \text{(par hyp. 1).}
\end{aligned}$$

Voici chacune des étapes de raisonnement illustrée dans le cas de la simplification $6/8=3/4$

$$\begin{aligned}
\frac{6}{8} &= \frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=3\cdot 2\frac{1}{4\cdot 2}\\
&= 3\cdot 2\frac{1/4}{2}\\
&= 3\cdot 2\frac{1}{2}\frac{1}{4}\\
&= 3(1)\frac{1}{4}\\
&= 3\frac{1}{4}\\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$



On peut simplifier plusieurs facteurs communs au numérateur et au dénominateur, peut importe l'ordre du produit de ces facteurs. Par exemple :

$$\frac{abcde}{abbcdd}=\frac{\cancel{a}\cancel{b}\cancel{c}\cancel{d}e}{\cancel{a}b\cancel{b}\cancel{c}\cancel{d}d}=\frac{e}{bd}.$$

Cela est vrai car un produit de facteurs commun est un facteur commun, que l'on peut simplifier.

$$\frac{abcde}{abbcdd}=\frac{\cancel{(abcd)}e}{\cancel{(abcd)}bd}=\frac{e}{bd}.$$

6.1 Fausse simplification

Une erreur fréquente est de simplifier des termes communs ou un terme et un facteur commun plutôt que des facteurs communs au numérateurs et au dénominateur. Par exemple,

$$\frac{a+c}{b+c}\neq\frac{a}{b}.$$

Si on prend les valeurs 1, 2 et 3 pour a, b et c, on a que

$$\frac{a+c}{b+c}=\frac{1+3}{2+3}=\frac{4}{5}$$

mais que

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}.$$

7 Addition et soustractions de fractions 2 : parts de taille inégales (dénominateur commun)

Pour additionner des fractions de tailles inégales, il faut utiliser plusieurs des propriétés précédentes. Par exemple, si on veut additionner

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2},$$

il nous faut combiner des tiers et des demi. Quand les parts sont de tailles égales, c'est simple, il suffit d'additionner le nombre de parts. Quand les parts sont de tailles inégales, l'astuce est d'utiliser la propriété de simplification, qui permet de changer la part des tailles sans changer la valeur d'une fraction, pour transformer les fractions à additionner pour qu'elles aient des parts de taille égales :

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}$$

Le problème initial est donc devenu l'addition de 4 et 3 parts de taille $1/6$, ce que nous savons faire selon l'hypothèse 6 :

$$\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}.$$

.

8 Propriétés générales pour la multiplication et la division de fractions.

Propriété 7 (Produit de fractions). *Le produit de deux fractions est la faction obtenue en multipliant leurs numérateurs et leurs dénominateurs*

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}\frac{c}{d} &= a\frac{1}{b}c\frac{1}{d} && \text{(par hyp. 1)}\\
&= ac\frac{1}{b}\frac{1}{d} && \text{(hyp. 4)}\\
&= ac\frac{1}{bd} && \text{(hyp. 3)}\\
&= \frac{ac}{bd} && \text{(par hyp. 1)}
\end{aligned}$$

□

Propriété 8 (Rapport de fractions). *La division d'une fraction par une autre est le produit par son inverse :*

$$\frac{a/b}{c/d}=\frac{a}{b}\frac{d}{c}.$$

Démonstration. Laissé en exercice ! Identifier à chaque égalité quelle propriété ou hypothèse est utilisée. □

Exercices

Question 1

Simplifier les fractions suivantes.

a) $\frac{12}{24}$

b) $\dfrac{4}{10}$

c) $\dfrac{12}{18}$

d) $\dfrac{15}{25}$

e) $\dfrac{30}{100}$

f) $\dfrac{40}{100}$

g) $\dfrac{50}{100}$

h) $\dfrac{24}{34}$

i) $\dfrac{45}{100}$

j) $\dfrac{26}{18}$

k) $\dfrac{70}{30}$

l) $\dfrac{75}{30}$

m) $\dfrac{30}{35}$

n) $\dfrac{75}{30}$

o) $\dfrac{64}{24}$

p) $\dfrac{2\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 25}$

q) $\dfrac{9\cdot 25}{3\cdot 125}$

r) $\dfrac{9/5}{3/125}$

s) $\dfrac{18/4}{3/24}$

t) $\dfrac{5/99}{3/11}$

u) $\dfrac{19+9}{23+12}$

v) $\dfrac{14/18}{-21/12}$

w) $\dfrac{-15/9}{18/-12}$

x) $\dfrac{4}{2/5}$

y) $\dfrac{3}{4/5}$

z) $\dfrac{3/4}{5}$

aa) $\dfrac{18/21}{12}$

bb) $\dfrac{14/12}{21}$

Question 2

Réécrire les expressions suivantes utilisant la barre de fraction en utilisant plutôt le symbole ÷. (Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs)

a) $\dfrac{2\times 3}{4}$

b) $2\times\dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{(2\times 3)}{4}$

d) $\dfrac{2\times 3}{4\times 5}$

e) $\dfrac{2+3}{4+5}$

f) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$

g) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1/2}}$

Question 3

Réécrire les expressions suivantes utilisant le symbole ÷ en utilisant plutôt une barre de fraction. (Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs)

a) $2\times(3\div 4)$

b) $2\times 3\div 4$

c) $(2\times 3)\div 4$

d) $2\times(3\div 4)$

e) $2\times 3\div 4\times 5$

f) $2\times 3\div(4\times 5)$

g) $(2\times 3)\div(4\times 5)$

h) $2\div 3\div 4$

i) $2\div(3\div 4)$

j) $2\div 3\div 4\div 5$

k) $(2\div 3)\div(4\div 5)$

Question 4

Effectuer chacune des opérations ci-dessous et simplifier le résultat.

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\div\frac{1}{3}-\frac{3}{2}$

b) $2+\frac{4}{3}\times\frac{7}{2}\div\frac{14}{9}$

c) $-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{2}{6}\right)\times\frac{5}{7}$

d) $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}}$

e) $\dfrac{\frac{1}{7}-\frac{2}{7}}{7}$

f) $\dfrac{7}{1/7-2/7}$

g) $\dfrac{1/2}{3-4/3}$

h) $\dfrac{\frac{3}{7}-\frac{4}{5}}{3}$

i) $\dfrac{2-\frac{2}{5}}{2}$

j) $\left(\dfrac{2}{3}\right)\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{3}$

k) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

l) $12\div(6\div 2)-12\div 6\div 2$

m) $2\times 3\times 4-2\times(3\times 4)$

n) $6\div 2\times 4-6\times 2\div 4$

o) $3\times(5+3)\div 3+(3\times 5+3\div 3)$

p) $1+2/3$

q) $3/2+1$

r) $\frac{1}{15}+\frac{9}{1500}$

s) $\dfrac{(1+2)^2}{1^2+2^2}$

t) $\left(\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{50/14}{25/21}$

Question 5

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{64}{128}$

b) $\dfrac{81}{3}$

c) $\dfrac{256}{5(16)}$

d) $\dfrac{21}{49}$

e) $5\times 39-12\times 13$

f) $\dfrac{2^4 3^2 5^3}{100}$

g) $\dfrac{2^4+2^3}{64}$

h) $\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{5}$

i) $\dfrac{3}{40}-\dfrac{5}{24}$

j) $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}}{\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}}$

k) $10\left(\dfrac{0}{2}\right)\frac{1}{2}$

Solutions

Question 1

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{3}{10}$
f) $\frac{2}{5}$
g) $\frac{1}{2}$
h) $\frac{12}{17}$
i) $\frac{9}{20}$
j) $\frac{13}{9}$
k) $\frac{7}{3}$
l) $\frac{5}{2}$
m) $\frac{6}{7}$
n) $\dfrac{5}{2}$
o) $\frac{8}{3}$
p) $\frac{3}{10}$
q) $\frac{3}{5}$
r) 75
s) 36
t) $\frac{5}{27}$
u) $\frac{4}{5}$
v) $\frac{-4}{9}$
w) $\frac{10}{9}$
x) 10
y) $15/4$
z) $3/20$
aa) $1/14$
bb) $1/18$

Question 2

a) $2\times3\div4$
b) $2\times3\div4$
c) $(2\times3)\div4$
d) $(2\times3)\div(4\times5)$
e) $(2+3)\div(4+5)$
f) $(2\div3)\div(4\div5)$
g) $1\div(1+1\div(1+1\div2))$

Question 3

a) $2\times\frac{3}{4}$
b) $\frac{2\times3}{4}$
c) $\frac{2\times3}{4}$
d) $2\times\frac{3}{4}$
e) $2\times\frac{3}{4}\times5$
f) $2\times\frac{3}{4\times5}$
g) $\frac{2\times3}{4\times5}$
h) $\frac{2/3}{4}$
i) $\frac{2}{3/4}$
j) $\dfrac{\frac{2/3}{4}}{5}$
k) $\frac{2/3}{4/5}$

Question 4

a) $\frac{47}{30}$
b) 5
c) $1/7$
d) $13/22$
e) $-1/49$
f) -49
g) $3/10$
h) $13/105$
i) $4/5$
j) $13/105$
k) $3/5$
l) 3
m) 0
n) 9
o) 24
p) $5/3$
q) $5/2$
r) $\frac{109}{1500}$
s) $9/5$
t) 1

Question 5

a) $1/2$
b) 27
c) $16/5$
d) $3/7$
e) $(13)(15-12)=39$
f) $2^2 3^2(5) = 180$
g) $3/2^3$
h) $31/35$
i) $-2/15$
j) $30/41$
k) 0