Exposants

Yannick Delbecque

La notation exponentielle a été inventé pour simplifier l'écriture de produits répétés. Si a est la longueurs d'un côté dans une figure géométrique, des expressions comme « $a \times a$ » et « $a \times a \times a$ » apparaissent dans plusieurs problèmes de géométrie parce qu'elles correspondent à l'aire du carré de côté a et le volume du cube de même coté. On nommait d'ailleurs ces quantités « carré » ou « cube ». Des problèmes géométriques plus complexes on aussi menés à utiliser des quantités définies par multiplication répété comme le carré et le cube. Comme les expressions telles que

$$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$$

ne sont pas facile à lire, plusieurs ont commencé à chercher une meilleure notation pour simplifier l'écriture de telles quantités. La notation qui s'est finalement imposée est la notation exponentielle que nous utilisons encore aujourd'hui. La lourde expression donnée plus haut est remplacée par a^8, où le nombre 8 représente le nombre d'occurrences de a dans le produit. Par la suite, cette idée a été généralisée pour donner un sens à des expressions comme $a^{2/3}$ où les exposants sont des nombres quelconques, en examinant des suites de nombres construites par multiplication à répétition par un même facteur, comme la suite

$$2, 4, 8, 16, \text{ etc}$$

obtenue par doublement répétée.

Ce document vise à établir les propriétés des exposants et à vous donner une habilité de base à les manipuler. La maitrise de la notation exponentielle et de ses propriétés est essentielle pour aborder des sujets plus avancés comme les logarithmes et les règles de dérivations et d'intégration. On invite le lecteur désirant en savoir plus sur les motivations originales ayant mené à l'élaboration de la notation exponentielle lire l'annexe historique à la fin de ce document.

1 Exposants naturels positifs

Commençons par définir le cas le plus simple d'exposant. Un exposant entier positif indique le nombre de fois que l'on multiplie un nombre par lui-même.

Définition 1. Soit a un nombre réel quelconque. On note par a^n le produit de la a par lui-même répété n fois ($n > 0$) :

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Cela donne par exemple que $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $3^2 = 3 \times 3 = 9$.
Dans l'expression a^n, on appelle a la **base** et n l'**exposant**. On dit aussi que a^n une **puissance** de a.

Quand l'exposant est 1, on a un produit de la base une seule fois par elle-même, ce qui donne la base elle-même. On peut écrire cela de la manière suivante :

$$b^1 = b.$$

On remarque que l'ordre dans lequel on écrit 2 et 3 est important : le résultat est différent pour 2^3 et pour 3^2. Cela distingue l' exponentiation des opérations comme l'addition et la multiplication, pour lesquelles le choix de l'ordre des arguments ne change pas le résultat.

Question 1

Dans l'expression 7^8, quelle est la base et quel est l'exposant ?

Question 2

Vérifier que $1^3 \neq 3^1$. Trouvez trois autres exemples de puissances telles que $a^b \neq b^a$ et un exemple où $a^b = b^a$.

Quand une expression comporte plusieurs exposants, l'ordre des opérations est important. Par exemple $(2^3)^2$ ne donne pas le même résultat que $2^{(3^2)}$. On a d'une part que $(2^3)^2 = (8)^2 = 64$, mais d'autre part que $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$. Ainsi,

$$2^{(3^2)} \neq (2^3)^2.$$

Si de manière générale, il n'est pas vrai que $(a^b)^c = a^(b^c)$, cela est vrai pour certaines valeurs spécifiques de a, b et c, comme $a = b = c = 1$.

Question 3

Vérifier que $(1^1)^1 = 1^{(1^1)}$.

1.1 Puissances et produits

Comme les exposants dénotent des multiplications répétées, on peut combiner plusieurs répétitions... répétées en une seule, comme par exemple

$$\begin{aligned} 3^2 3^4 &= (3\times 3)\times(3\times 3\times 3\times 3) \\ &= (3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3) \\ &= 3^6. \end{aligned}$$

Cet exemple devrait convaincre le lecteur que les exposants doivent s'additionner : 2 répétitions combinées avec 4 répétitions donnent $2+4=6$ répétitions.

Question 4

Vérifiez que $5^3\times 5^4 = 5^7$.

La propriété suivante est la généralisation de ce qui vient d'être constaté.

Propriété 1.

$$a^n a^m = a^{n+m} \text{ pour tout nombre naturel } n>0$$

Démonstration. Il suffit de compter le nombre de fois où « a » apparait dans le produit $a^n a^m$: il apparait $n+m$ fois.

$$\begin{aligned} a^n a^m &= \underbrace{a\times\cdots\times a}_{n \text{ fois}}\ \underbrace{a\times\cdots\times a}_{m \text{ fois}} \\ &= \underbrace{a\times\cdots\times a}_{n+m \text{ fois}} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

Le produit $a^n a^m$ est donc bien égal à a^{n+m}. □

1.2 Puissances de puissances

Une autre propriété importante de la notation exponentielle se démontre de manière similaire : si on ajoute un exposant à une expression comportant déjà un exposant, on obtient des expressions de la forme $(a^n)^m$. Par exemple si on ajoute d'exposant 4 à l'expression 2^3, on obtient $(2^3)^4$. Comme la notation exponentielle désigne une multiplication répétée, il est possible de simplifier une telle expression en utilisant le fait qu'elle désigne une multiplication du nombre 2 par lui-même un certain nombre de fois. En utilisant deux fois la définition d'exposant, on a que

$$\begin{aligned} (2^3)^4 &= (2^3\times 2^3\times 2^3\times 2^3) \\ &= \Big((2\times 2\times 2)\times(2\times 2\times 2)\times(2\times 2\times 2)\times(2\times 2\times 2)\Big) \\ &= 2^{4\cdot 3} \end{aligned}$$

car il y a $4\cdot 3$ occurrences de 2 dans le long produit $(2^3)^4$.
Ces expressions ont la propriété suivante.

Propriété 2.

$$(a^n)^m = a^{nm} \text{ pour tout nombres naturels } n,m>0$$

Démonstration. Il suffit de compter le nombre de fois où a apparait dans le produit $(a^n)^m$: il apparait m fois n fois, donc mn fois. En détails :

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= \underbrace{a^n\times\cdots\times a^n}_{m \text{ fois}} \\ &= \underbrace{\underbrace{a\times\cdots\times a}_{n \text{ fois}}\times\cdots\times\underbrace{a\times\cdots\times a}_{n \text{ fois}}}_{m \text{ fois}} \\ &= \underbrace{a\times\cdots\times a}_{nm \text{ fois}} \\ &= a^{nm} \end{aligned}$$

Comme a apparait nm fois dans le produit $(a^n)^m$, on a donc

$$(a^n)^m = a^{nm},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Les cas particuliers où la base est 0 ou 1 donnent la propriété suivante.

Propriété 3.

$$0^n = 0 \text{ et } 1^n = 1 \text{ pour tout nombre naturel } n>0.$$

Ces deux égalités découlent du fait que $0\cdot 0\cdots 0 = 0$ et que $1\cdot 1\cdots 1 = 1$.

Question 5

Quelle est la valeur de 0^1 ?

1.3 Puissances et autres opérations

Si un exposant est appliqué à un produit de deux facteurs, comme dans l'expression $(2\cdot 3)^4$, il est possible de réécrire le produit d'une manière différente :

$$(2\cdot 3)^4 = (2\cdot 3)(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2\cdot 3) = (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3) = 2^4 3^4.$$

Il est possible de réécrire une expression comme $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ de manière similaire :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}.$$

Question 6

Montrer de manière similaire que

$$\left(\frac{2\cdot 3}{4}\right)^2 = \frac{2^2\cdot 3^2}{4^2}.$$

Les exposants semblent pouvoir être « distribués » sur les produits. La distributivité du produit sur la somme veut dire qu'un facteur d'une somme peut être vu comme un facteur de chaque terme de la somme :

$$a(b+c) = ab + ac.$$

De même, l'exposant d'un produit ou d'un quotient peut être vu comme un exposant de chaque facteur du produit ou du numérateur et du dénominateur du quotient.

Propriété 4.

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(ab)^n &= \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ fois}} \\ &= \underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ fois}}\underbrace{bb\cdots b}_{n \text{ fois}} \\ &= a^n b^n\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \underbrace{\frac{a}{b}\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n \text{ fois}} \\ &= \frac{\overbrace{aa\cdots a}^{n \text{ fois}}}{\underbrace{bb\cdots b}_{n \text{ fois}}} \\ &= \frac{a^n}{b^n}\end{aligned} \qquad \square$$

1.3.1 Puissances et sommes

En général, il n'est pas vrai que la puissance d'une somme est la somme des puissances des termes. Autrement dit, la propriété suivante est fausse :

$$(a+b)^n = a^n + b^n.$$

On peut s'en convaincre en vérifiant que cet énoncé est faux sur un exemple spécifique. Dans ce cas, on peut substituer à peu près n'importe quels nombres à a, b et n et l'énoncé obtenu sera faux. Par exemple, si $a = 1$, $b = 2$ et $n = 3$, le membre de gauche de l'énoncé est

$$(1+2)^3 = 3^3 = 27$$

mais le membre de droite est

$$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9.$$

On doit donc conclure que

$$(1+2)^3 \neq 1^3 + 2^3$$

et dont que, de manière générale,

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n.$$

Pour certaines valeurs de a, b et n l'énoncé particulier est vrai : par exemple

$$(0+1)^2 = 0^2 + 1^2$$

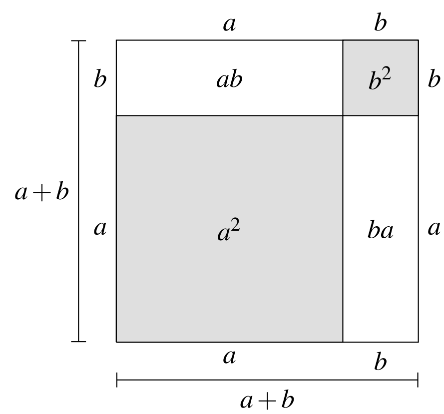
car chaque membre de cette égalité vaut 1. Cela n'invalide pas ce que nous avons dit : l'énoncé est faux en général, même s'il existe des cas particuliers où il est vrai.

Dans le cas où l'exposant n est 2, on peut se convaincre géométriquement que

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

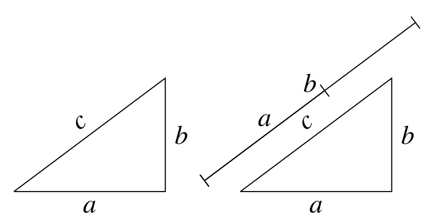
de différentes manières.

Par exemple, l'aide du carré suivant peut être calculé de deux manières.



Le grand carré de côté $a+b$ a une aire de $(a+b)^2$. Comme cette aire doit être la somme des aires des deux carrés et deux rectangles qui la compose, elle doit aussi être égale à $a^2 + ab + ba + b^2$, ce qui est égal à $a^2 + b^2 + 2ab$. On peut donc voir que l'aire du grand carré $(a+b)^2$ ne peut être égale à la somme des aires des deux petits carrées $a^2 + b^2$ car il manque l'aire des deux rectangles $2ab$.

On peut aussi se convaincre géométriquement que $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ en utilisant le théorème de Pythagore.



Le théorème de Pythagore dit que $c^2 = a^2 + b^2$. S'il était vrai que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, le théorème de Pythagore pourrait s'écrire $c^2 = (a+b)^2$. Si c'était le cas, en prenant la racine carrée de chaque membre de cette égalité, on aurait que

$$c = a + b,$$

c'est à dire que l'hypoténuse dans le triangle rectangle de droite serait égale à la somme des côtés a et b, ce qui est géométriquement faux.

2 L'exposant zéro

Nous avons défini a^n uniquement pour les nombres entiers strictements positif. Il est possible d'étendre la définition que nous avons donné pour au cas l'exposant est $n = 0$. On pourrait aborder le problème en se demandant ce que devrait signifier « multiplier a aucune fois par lui-même », mais l'intuition ne nous aide pas : cela devrait-il donner 1 ou 0, ou encore une autre valeur ? Il faut donc réfléchir un peu plus à la notion d'exposant pour déterminer donner un sens à des expressions comme 2^0.

On peut former un tableau nous donnant l'ensemble des puissances d'une même base en fonction de l'exposant. Pour la base 2, un tel tableau est

$$\begin{array}{cccc} 2^1 & 2^2 & 2^3 & \cdots \\ 2 & 4 & 8 & \cdots \end{array}$$

On voit que, si on va de gauche à droite, pour passer d'un nombre au suivant on multiplie par 2. Inversons le sens de lecture : si on lit plutôt de droite à gauche, on passe d'un nombre au suivant en divisant par 2 : $8/2 = 4$, $4/2 = 2$. Si on continue à suivre la même règle pour passer de 2^1 à 2^0, il faut diviser 2^1 par 2. On obtient donc que $a^0 = 2^1/2 = 2/2 = 1$. Il faut donc choisir 1 comme valeur de 2^0. Ce choix nous permet de compléter le tableau avec une nouvelle colonne pour 2^0 :

$$\begin{array}{ccccc} 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & \cdots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & \cdots \end{array}$$

Question 7

Déterminer ce que devrait valoir 3^0 à l'aide d'un tableau similaire.

De manière générale, on peut faire une suite semblable en prenant une base générale a :

$$a^1 \quad a^2 \quad a^3 \quad \cdots$$

Encore une fois, pour aller vers la droite on multiplie par a et pour aller vers la gauche on divise par a. Comme on divise par a, la valeur de a ne peut être zéro. On suppose donc que $a \neq 0$. Pour passer de a^1 à a^0 comme ont est passé de 2^1 à 2^0, on divise par a pour obtenir $a^0 = a^1/a = 1$.

On peut aussi déterminer la valeur de a^0 de manière algébrique : si on souhaite avoir une définition compatible avec la propriété 1 et la définition de a^n, la valeur de a^0 doit forcément être 1. Voyons pourquoi.

On peut montrer que $a^0 = 1$ de manière plus formelle en utilisant la propriété 1 (que l'on veut toujours valable). Si cette dernière propriété était aussi valable pour l'exposant 0, on devrait avoir que

$$a^n a^0 = a^{n+0} = a^n$$

Si $a = 0$, on a automatiquement que $a^n = 0$ et l'égalité $a^n a^0 = a^n$ est automatiquement vérifiée peu importe la valeur que l'on donne à a^0. Si $a \neq 0$, alors $a^n \neq 0$ et on peut diviser chaque membre de l'égalité $a^n a^0 = a^n$ par a^n :

$$\frac{a^n a^0}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} \Rightarrow a^0 = 1.$$

On obtient donc que a^0 doit prendre la valeur 1 si $a \neq 0$. Comme c'est la seule valeur possible pour a^0 qui est compatible avec la propriété 2, on complète donc la définition 1 par la définition suivante.

Définition 2 (Exposant nul)**.**

$$a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

Le cas 0^0 reste indéfini, pour les même raisons que $0/0$ l'est aussi : il n'y a pas moyen de donner à 0^0 une valeur unique ou compatible avec les autres règles algébriques ! Si $a^0 = 1$ pour toute base a, on devrait avoir $0^0 = 1$. Comme $0^n = 0$ pour tout exposant n, alors on devrait avoir $0^0 = 0$. Il y a donc incompatibilité entre ces deux résultats, il n'y a donc pas moyen de donner une valeur à 0^0 sans obtenir une contradiction.

Question 8

Quelle est la valeur de 1^0 ?

---

3 Exposants négatifs

Si on veut donner un sens à l'utilisation de puissances négatives comme a^{-n} tout en préservent la validité des propriétés précédentes, on peut prolonger les suites utilisées précédemment vers la gauche pour trouver les valeurs correspondant aux exposants négatifs. Par exemple, en prolongeant par la gauche la suite $2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ en divisant par 2 pour passer d'un nombre au suivant, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} 2^{-2} & 2^{-1} & 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & \cdots \end{array}$$

On peut voir que 2^{-n} doit signifier » 1 divisé n fois par 2 », autrement dit $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$.

Question 9

Faire un tableau similaire au tableau précédant en prenant pour base le nombre 3.

Définition 3 (Exposants négatifs)**.**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{si } a \neq 0.$$

La propriété 1 demeure vraie pour les exposants négatif : on a par exemple que

$$2^4 \cdot 2^{-3} = 2^4 \frac{1}{2^3} = \frac{2^4}{2^3} = 2 = 2^{4-3}.$$

L'exposant positif 4 donne quatre occurrences de la base au numérateur et l'exposant négatif -3 donne trois occurrence de la base au dénominateur :

$$2^4 2^{-3} = 2^4 \frac{1}{2^3} = \frac{2^4}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2}.$$

Il peut être utile de lire un produit comme $2^4 \cdot 2^{-3}$ comme

> « quatre occurrences de 2 divisées par trois occurrences de 2. »

Comme chaque division par 2 élimine, par simplification, une occurrence de 2 du numérateur, on peut aussi dire directement :

> « produit de quatre occurrences de 2 moins deux occurrences de 2. »

Question 10

Multiplier 3^{10} par 3^{-8}, 5^{-2} par 5 et 2^{-2} par 2^{-1}.

Comme les exposants négatifs s'interprètent comme des fractions, les résultats obtenus en calculant avec les propriétés des exposants doivent être les mêmes que ceux obtenus à l'aide des propriétés des fractions. Par exemple, si on divise deux puissances d'une même base, on peut soit utiliser la propriété 1, soit les propriétés des fractions, ou soit une combinaison des deux.

$$\frac{3^4}{3^2} = 3^4 \frac{1}{3^2} = 3^4 3^{-2} = 3^{4+(-2)} = 3^2$$

$$\frac{3^4}{3^2} = \frac{3^2 3^3}{3^2} = \frac{3^2}{1} = 3^2$$

On peut aussi simplifier des expressions plus complexes combinant fractions et exposants négatifs comme

$$\frac{2^4 2^{-3}}{2^2 2^{-1}}.$$

Il y a plusieurs manières de procéder qui donnent toutes le même résultat.

$$\begin{aligned} \frac{2^4 2^{-3}}{2^2 2^{-1}} &= \frac{2^{4-3}}{2^{2-1}} \\ &= \frac{2^1}{2^1} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2^4 2^{-3}}{2^2 2^{-1}} &= \frac{2^4}{2^2} \frac{2^{-3}}{2^{-1}} \\ &= 2^{4-2} 2^{-3} \frac{1}{2^{-1}} \\ &= 2^2 \frac{1}{2^3} \frac{1}{1/2} \\ &= 2^2 \frac{1}{2^3} 2 \\ &= 2^3 \frac{1}{2^3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2^4 2^{-3}}{2^2 2^{-1}} &= 2^{4+(-3)-2-(-1)} \\ &= 2^{4-3-2+1} \\ &= 2^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

On peut déterminer algébriquement la valeur de a^{-n} : si on veut donner un sens à l'utilisation de puissances négatives comme a^{-n} tout en préservent la validité des propriétés précédentes et celle du calcul algébrique sans les exposants, la définition de a^{-n} est forcée. Imagions que a^{-n} est défini et tentons de déterminer sa valeur à l'aide de ce que nous savons déjà et de ce qui a déjà été défini. Par la propriété 1, on a que

$$a^n a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1.$$

Si on divise par a^n chaque membre de l'égalité $a^n a^{-n} = 1$, on obtient

$$\frac{a^n a^{-n}}{a^n} = \frac{1}{a^n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

On voit donc que la seule définition possible pour a^n est la suivante.

4 Exposants fractionnaires

La progression géométrique des puissances successives d'un nombre peut être rafinée en y ajoutant des nombres intermédiaires. Prenons encore la suite $2^1, 2^2, 2^3$ comme guide. Nous avons déjà établit la correspondance suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 2^{-2} & 2^{-1} & 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & \cdots \\ \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & \cdots \end{array}$$

Ajoutons y les exposants intermédiaires correspondant aux multiples de $1/2$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & 2^{-3/2} & 2^{-1} & 2^{-1/2} & 2^0 & 2^{1/2} & 2^1 & 2^{3/2} & 2^2 & 2^{5/2} & \cdots \\ \cdots & ? & \frac{1}{2} & ? & 1 & ? & 2 & ? & 4 & ? & \cdots \end{array}$$

Pour compléter le tableau, nous devons trouver un nombre c par lequel il faut multiplier un nombre de cette série pour passer au nombre suivant (vers la droite). Comme pour passer de $2^0 = 1$ à $2^1 = 2$ on doit multiplier deux fois par c, on doit avoir que $2^1 = 2^0 cc$, ou, autrement dit, $2 = cc = c^2$. Il faut donc que $c = \sqrt{2}$. On peut compléter le tableau ainsi :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & 2^{-3/2} & 2^{-1} & 2^{-1/2} & 2^0 & 2^{1/2} & 2^1 & 2^{3/2} & 2^2 & 2^{5/2} & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3} & \frac{1}{2} & \left(\sqrt{2}\right)^{-1} & 1 & \sqrt{2} & 2 & \left(\sqrt{2}\right)^3 & 4 & \sqrt{2}^5 & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3} & \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \left(\sqrt{2}\right)^0 & \sqrt{2} & \left(\sqrt{2}\right)^2 & \sqrt{2}^3 & \left(\sqrt{2}\right)^4 & \left(\sqrt{2}\right)^5 & \cdots \end{array}$$

Si on veut donner un sens aux exposants fractionnaires comme $a^{1/n}$ comme nous l'avons fait pour les exposants négatifs, la définition est encore une fois forcée par les propriétés déjà connues et les définitions déjà adoptés. Pour voir ceci, considérons

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{n\frac{1}{n}} = a^1 = a.$$

En prenant la racine n-ième de chaque côté de l'égalité $\left(a^{1/n}\right)^n = a$, on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left(a^{1/n}\right)^n} &= \sqrt[n]{a} \\ a^{1/n} &= \sqrt[n]{a}. \end{aligned}$$

À la lumière de ce résultat, nous n'avons d'autre choix que d'adopter la définition suivante.

Définition 4.

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

5 Exposants réels

À l'aide des propriétés et définitions vu jusqu'à ce point, nous pouvons donner un sens à des expressions où les exposants sont construit à l'aide d'additions et de soustraction, de multiplications et de divisions, comme par exemple

$$2^{-5} \qquad 4^{3/4} \qquad \left(5^{2+\frac{1}{2}}\right)^3.$$

Cependant, rien ne nous permet de déterminer le sens d'expressions comme

$$2^{\pi} \qquad 3^{\sqrt{2}} \qquad 5^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Pour ce faire, nous invoquerons un principe général concernant de tels nombres : tout nombre réel peut être approximé par une suite de nombre rationnels. Par exemple, le nombre π peut être approximé par la suite de nombre

$$\begin{aligned} c_0 &= 3 \\ c_1 &= 3.1 \\ c_2 &= 3.14 \\ c_3 &= 3.141 \\ c_4 &= 3.1415 \\ &\vdots \\ c_n &= \pi \text{ approximé à } n \text{ décimales} \end{aligned}$$

Nous avons donc $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Calculer a^{π} devient donc

$$a^{\pi} = a^{\left(\lim\limits_{n\to 0} c_n\right)}.$$

Si on souhaite que la fonction $f(x) = a^x$ soit continue, on doit pouvoir prendre « sortir la limite » de la fonction a^x :

$$a^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} c_n\right)} = \lim_{n\to\infty} a^{c_n}.$$

En utilisant la suite c_n pour approximer π et choisissant de faire de a^x une fonction continue, on doit donc définir a^{π} par

$$a^{\pi} = \lim_{n\to\infty} a^{c_n}.$$

On adapte cette définition pour n'importe quel nombre réel c : tout nombre réel c peut être approximé par une suite c_n comme nous l'avons fait pour π. En choisissant de faire de a^x une fonction continue, on dont définir a^c de la manière suivante.

Définition 5. Si $c = \lim_{x\to\infty} c_n$ est un nombre réel quelconque, alors a^c est défini par

$$a^c = \lim_{n\to\infty} a^{c_n}.$$

Par exemple, 2^{π} est calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \\ 2^{3.1} &\approx 8.57418770029035\ldots \\ 2^{3.14} &\approx 8.81524092701289\ldots \\ 2^{3.141} &\approx 8.82135330455130\ldots \\ 2^{3.1415} &\approx 8.82441108247912\cdots \\ \vdots\ & \quad \vdots \\ 2^{3.141562653579} &= 8.82497782701571\cdots \\ \vdots\ & \quad \vdots \\ \downarrow\ & \quad \downarrow \\ 2^{\pi} &\approx 8.82497782707629\ldots \end{aligned}$$

6 Histoire des exposants

C'est Descartes qui introduit, au début de la *Géométrie*, la notation exponentielle « a^3 » comme un raccourci pour éviter d'écrire des expressions comme « *aaa* » pour désigner le cube de a. Cela lui permet de parler de puissance aussi grande que l'on veut (« & aisni a l'infini » dit Descartes) car il est beaucoup plus simple d'écrire « a^{10} » que « *aaaaaaaaaa* ».

Avant d'avoir notation inventée par Descartes, dans le contexte algébrique les puissances d'une variable par répétition : *aa* pour a^2 et *aaa* pour a^3. On pouvait aussi parler de « carré » et de « cube » de a, car l'algèbre était pour la plupart subordonnée à la géométrie. Par exemple, dans sa traduction d'*Isagoge* de Viète, Vasset écrit :

> $A - B$ *cubus cubus aequabitur A cubo-cubus* $-6A$ *quadrato-cubus in B* $+15A$ *quad.quad. in B quad.* $-20A$ *cubus in B cubum* $+15A$ *quadratum in B quad.-quad-* $6AB$ *quad.-cub.* + *B cubus-cubus.*

pour décrire l'égalité que nous écririons en notation moderne comme

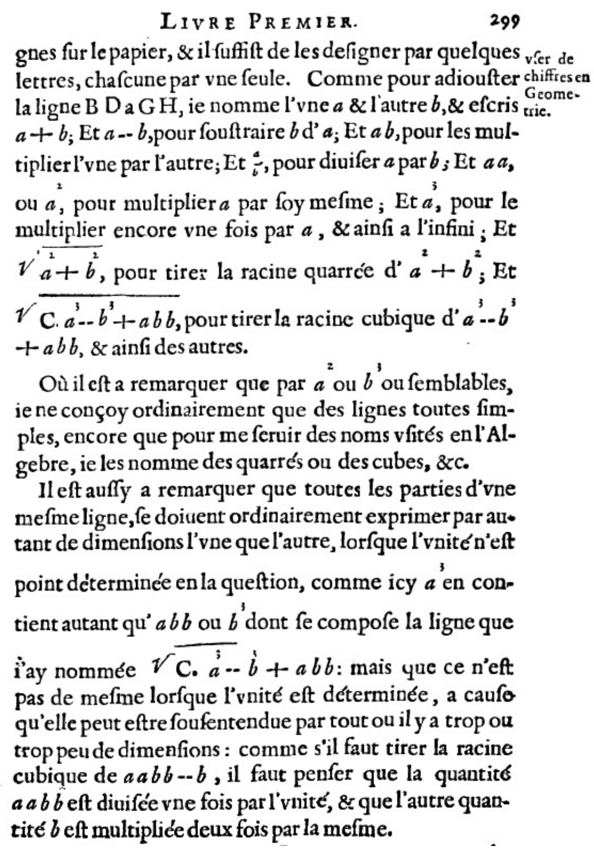
$$(A-B)^6 = A^6 - 6A^5B + 15A^4B^2 - 20A^3B^3 + 15A^2B^4 - 6AB^5 + B^6.$$

Dans ce passage de Viète, *cubus* veut dire « cube » et *quadratum* veut dire « carré ». On note l'utilisation de puissances composées dans l'expression de Viète : *quadrato-cubus* désigne par exemple la puissance $A^{2+3} = A^5$. Notons au passage que l'égalité présentée par Viète est le développement du binôme $(A+B)^6$ avec les coefficients données par le triangle de Pascal.

C'est dans l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis que sont définis les exposants fractionnaires pour la première fois. Ce livre a d'ailleurs eu beaucoup d'influence sur Newton, qui a étudié ce livre à l'école : c'est l'œuvre de Wallis qui a sans doute fait en sorte que Newton a commencé les travaux qui le mèneront à développer sa version du calcul différentiel et intégral.

Bien que Wallis ait introduit le concept d'exposant fractionnaire, c'est Newton qui utilisera la notation exponentielle $a^{n/m}$ pour la première fois, dans une lettre à Oldenburg. Cela jouera un rôle dans ses travaux sur ce qui deviendra le théorème du binôme de Newton, qui généralise le triangle de Pascal au exposants fractionnaires. Ce théorème a joué un rôle important dans le développement du calcul différentiel et intégral.

Page de la Géométrie de René Descartes où la notation « a^n » est introduite pour la première fois.



LIVRE PREMIER. 299

gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne *a* & l'autre *b*, & eſcris $a+b$; Et $a-b$, pour ſouſtraire *b* d'*a*; Et *ab*, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer *a* par *b*; Et *aa*, ou a^2, pour multiplier *a* par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par *a*, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2+b^2}$, pour tirer la racine quarrée d' a^2+b^2; Et $\sqrt{C.\, a^3-b^3+abb}$, pour tirer la racine cubique d' a^3-b^3+abb, & ainſi des autres.

Vſer de chiffres en Geometrie.

Où il eſt a remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſeruir des noms vſités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il eſt auſſy a remarquer que toutes les parties d'vne meſme ligne, ſe doiuent ordinairement exprimer par autant de dimenſions l'vne que l'autre, lorſque l'vnité n'eſt point determinée en la queſtion, comme icy a^3 en contient autant qu' *abb* ou b^3 dont ſe compoſe la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, a^3-b^3+abb}$: mais que ce n'eſt pas de meſme lorſque l'vnité eſt determinée, a cauſe qu'elle peut eſtre ſouſentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimenſions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb-b$, il faut penſer que la quantité *aabb* eſt diuiſée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité *b* eſt multipliée deux fois par la meſme.

Pour conclure, laissons le mathématicien Laplace raconter l'histoire des exposants : il en donne les détails dans cet extrait de son livre *Théorie analytique des probabilité*, publié en 1820. [1]

> La position d'une grandeur à la suite d'une autre suffit pour exprimer leur produit. Si ces grandeurs sont la même, ce produit est le carré ou la seconde puissance de cette grandeur. Mais, au lieu de l'écrire deux fois, Descartes imagina de ne l'écrire qu'une fois, en lui donnant le nombre 2 pour exposant, et il exprima les puissances successives, en augmentant successivement cet exposant d'une unité.
>
> Wallis, qui s'est attaché spécialement à suivre le fil de l'induction et de l'analogie, a été conduit par ce moyen à exprimer les puissances radicales par de exposants fractionnaires ; et de même que Descartes exprimait par les exposants 2, 3, … les puissances secondes, troisièmes, … d'une grandeur, il exprima ses racines secondes, troisièmes, … par les exposants fractionnaires $1/2$, $41/3$, … En général, il exprima par l'exposant m/n la racine n

1. Ce texte est disponible en ligne dans la librairie Gallica à l'adresse `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k775950/f4`

d'une grandeur élevée à la puissance m. En effet, suivant la notation de Descartes, cette expression a lieu dans le cas où m est divisible par n, et Wallis, par analogie, l'étendit à tous les cas

Mais il est remarquable que Wallis, qui avait si bien considéré les indices fractionnaires des puissances radicales, ait continué de noter ces puissances comme on l'avait fait avant lui. On voit la notation des puissances radicales par les exposants fractionnaires employée pour la première fois dans les lettres de Newton à Oldenburg, insérées dans le *Commercium epistolicum*. En comparant par la voie de l'induction, donc Wallis avait fait un si bel usage, les exposants des puissances du binôme avec les coefficients des termes de son développement, dans le cas où ces exposants sont des nombres entiers, il détermina la loi de ces coefficients, et il l'étendit, par analogie, aux puissances fractionnaires et aux puissances négatives.

Mais l'extension la plus importante que cette notation ait reçue est celle des exposants variables, ce qui constitue le Calcul exponentiel, l'une des branches les plus fécondes de l'Analyse moderne. Leibnitz a indiqué le premier, dans les Actes de Leipzig pour 1682, les transcendantes à exposants variables, et par là il a complété le système des éléments dont une fonction finie peut être composée [...].

Leibnitz ayant adapté au Calcul différentiel une caractéristique très commode, il imagina de lui donner les mêmes exposants qu'aux grandeurs ; mais alors ces exposants, au lieu d'indiquer les multiplications répétées d'une même grandeur, indiquent les différentiations répétées d'une même fonction.

Résumé : Propriétés des exposants

On suppose $a, b, m, n \in \mathbb{R}$.

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

$$0^n = 0 \text{ et } 1^n = 1$$

$$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ si } a \neq 0$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Solutions

Question 1
La base est 7 et l'exposant 8.

Question 2
$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, mais $3^1 = 3$, donc $1^3 \neq 3^1$. Autres exemples : $1^2 \neq 2^1$, $2^3 \neq 3^2$, $3^4 \neq 4^3$, etc. Dans les cas particuliers où la base et l'exposant sont identiques, comme 2^2, inverser la base et l'exposant donne le même résultat $2^2 = 2^2$.

Question 3
D'une part, on a que $(1^1)^1 = (1)^1 = 1$. D'autre part,on a $1^{(1^1)} = 1^(1) = 1$. Ainsi, on a que $(1^1)^1 = 1^{(1^1)}$.

Question 4

$$\begin{aligned} 5^3 \times 5^4 &= (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5) \\ &= (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) \\ &= 5^7 \end{aligned}$$

Question 5
$0^1 = 0$ car c'est le produit de la base 0 une seule fois par elle même.

Question 6

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 3}{4}^2 &= \frac{2 \cdot 3}{4} \frac{2 \cdot 3}{4} \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4} \\ &= \frac{2^2 \cdot 3^2}{4^2} \end{aligned}$$

Question 7

$$\begin{array}{ccccc} 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & \cdots \\ 1 & 3 & 9 & 27 & \cdots \end{array}$$

Question 8
$1^0 = 1$.

Question 9

$$\begin{array}{ccccccc} 3^{-2} & 3^{-1} & 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & \cdots \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 & 3 & 9 & 27 & \cdots \end{array}$$

Question 10
$3^{10}3^8 = 3^{10-8} = 3$. $5^{-2} \cdot 5 = \frac{1}{5^2}5 = \frac{5}{5^2} = \frac{1}{5}$. $2^{-2}2^{-1} = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$.