Quelques erreurs typiques

Yannick Delbecque

20 février 2017

Table des matières

1 Introduction

Quelques formes d'erreurs algébriques très fréquentes :

- utilisation de fausses propriétés de distribution (sans doute les erreurs les plus fréquentes)
- utilisation de fausse propriétés de simplification
- erreurs dans la priorité des opérations
- erreurs de contextes (substitutions dans une fonction et dans des propriétés algébriques)

2 Erreurs algébriques

2.1 Erreurs impliquant des produits

2.2 La priorité de la somme sur le produit

Cette erreur est sans doute causée par un désir d'écrire plus rapidement (avec moins de symboles) :

$$A \cdot B + C \neq A(B+C)$$

C'est une erreur dans l'ordre de priorité des opérations. Si elle est souvent répétée, cette erreur peut être signe d'une une mauvaise compréhension du sens du symbole « $\cdot$ » utilisé pour dénoter la multiplication : l'utilisation du point peut donner la mauvaise impression que le produit a priorité sur la somme quand il est dénoté de manière explicite par un symbole plutôt que par juxtaposition :

$$AB + C = (AB) + C.$$

Le produit a toujours priorité sur la somme, peu importe de quelle manière on le dénote.

2.2.1 La distributivité du produit sur le produit

La forme de cette erreur est la suivante :

$$A(B \cdot C) \neq AB \cdot AC.$$

On distribue le facteur A sur le produit BC comme on le ferait s'il s'agissait d'une somme $B+C$. Cette erreur est peut-être dûe au fait que l'on donne un statut spécial au point de multipliation « $\cdot$ » : le produit $A(B \cdot C)$ peut s'écrire sans le point comme ABC puisque le point et la juxtaposition désignent tout deux la multiplication et qu'ordre des facteurs dans un produit n'importe pas.

On peut se convaincre que $A(B \cdot C) \neq AB \cdot AC)$ n'est pas vrai en général si on prend un cas particulier ; par exemple si $A = 2$, $B = 3$ et $C = 4$, on a que

$$A(B \cdot C) = 2(3 \cdot 4) = 24$$
$$AB \cdot AC = 2(3) \cdot 2(4) = 48$$

Comme $24 \neq 48$, la propriété $A(BC) = (AB)(AC)$ n'est pas vraie dans ce cas particulier, donc elle n'est pas vraie en général !

On peut aussi se convaincre que cette propriété est fausse en la considérant comme une *fausse* formule pour calculer un volume : ABC est le volume d'une boite de côtés A, B et C ; si ces trois longueurs sont exprimées en m, alors le produit ABC est un volume exprimé en m^3. Cependant, le produit $ABAC$ serait une quantité exprimée en m^4, ce qui montre que l'égalité n'est pas vraie.

2.2.2 Autres erreurs impliquant des produits

$$A(B+C)^2 \neq (AB+AC)^2$$

2.3 Erreur impliquant des fractions

2.3.1 Simplification d'un terme

Simplification du type suivant :

$$\frac{A+B}{AC} \neq \frac{1+B}{C}.$$

Cette erreur est probablement due à une confusion : on simplifie comme si A était un facteur commun à AC et $A+B$, alors que A n'est pas un facteur de $A+B$!

Si on veut simplifier le membre de gauche, on doit d'abord séparer la faction en deux fractions de même dénominateur et simplifier ensuite :

$$\frac{A+B}{AC} = \frac{A}{AC} + \frac{B}{AC} = \frac{1}{C} + \frac{B}{AC}.$$

Variantes :

$$\frac{A+B}{A+C} \neq \frac{B}{C}.$$

$$\frac{A+B}{A} = 1+B.$$

Pour éviter cette erreur, se souvenir qu'« on peut simplifier un *facteur* commun au dénominateur et au numérateur. » Il ne faut donc pas confondre « terme »et « facteur ».

2.3.2 Distributivité de la division sur le dénominateur

L'erreur est de distribuer la une division sur un dénominateur comme on le ferait pour une multiplication :

$$\frac{A}{B+C} = \frac{A}{B} + \frac{A}{C}.$$

Exemple :

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{x+1-2} = \frac{1}{x-1}.$$

2.3.3 La distribution d'un produit sur une fraction

$$A\frac{B}{C} \neq \frac{AB}{AC}.$$

2.4 Autres erreurs de fractions

2.4.1 La simplification des « fractions à étages »

La propriété générale des fraction qui permet de simplifier les « fractions à étage » est celle disant que diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B}\frac{D}{C}$$

Comme la notation peut rendre difficile de retrouver le bon regroupement des fractions, il est préférable, quand c'est possible, d'écrire les étages avec une barre oblique ou de mettre des parenthèses :

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \frac{A/B}{C/D}.$$

Des expressions de ce type sont fréquentes et doivent être simplifiées. Quelques erreurs dans cette catégorie :

$$\frac{AB/C}{A} \neq \frac{A^2B}{C}.$$

$$\frac{A/B}{C} \neq \frac{AC}{B}.$$

$$\frac{A}{B/C} \neq \frac{AB}{C}.$$

Les fractions à trois étages sont aussi source de confusion :

$$\frac{\frac{A}{B}}{C} \neq \frac{AC}{B} \qquad \frac{A}{\frac{B}{C}} \neq \frac{AB}{C}$$

Avec la notation « barre de fraction », la différence entre le premier et le second exemple est parfois difficile à faire car elle repose sur une petite différence de longueur entre les barres de fraction. On préfèrera une des écritures suivantes pour éviter les confusions.

$$\frac{\frac{A}{B}}{C} = \frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C} = \frac{A/B}{C}$$

$$\frac{A}{\frac{B}{C}} = \frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)} = \frac{A}{B/C}$$

Les deux ne sont pas équivalentes :

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C} \neq \frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)}$$

Par exemple, pour $A = 2$, $B = 3$ et $C = 4$:

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{4} = \frac{2}{3}\frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)} = 2\frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Dans ces situations « à trois étages », on peut ce ramener à la forme « à quatre étages » en utilisant le fait que $A = \frac{A}{1}$.

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C} = \frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{1}\right)}$$

$$\frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)} = \frac{\left(\frac{A}{1}\right)}{\left(\frac{B}{C}\right)}$$

Truc pour éviter ce type d'erreur : mettre les parenthèses, mettre sur la forme « à quatre étages » et se rappeler que diviser par une fraction est équivalant à multiplier par l'inverse de celle-ci :

$$\frac{A/B}{C/D} = \frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \frac{AD}{BC}.$$

2.4.2 Autres erreurs impliquant des fractions

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \neq \frac{1/A}{1/B}$$

$$\frac{A}{C}\frac{B}{C} \neq \frac{AB}{C}$$

$$\frac{A}{C}\frac{B}{C} \neq \frac{AB}{C}$$

2.5 Erreurs impliquant des exposants

2.5.1 La distribution des exposants sur une somme

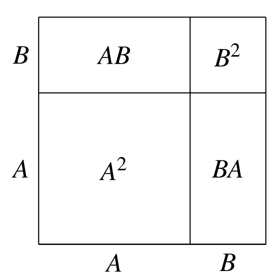
$$(A+B)^a \neq A^a + B^a$$

(sauf bien sûr pour $a = 1$)

Ces cas particuliers sont les plus fréquents :

$$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2 \quad (a = 2)$$
$$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (a = 1/2).$$

Dans le premier cas, on peut interpréter géométriquement l'erreur commise en comparant les aires des rectangles dans la figure suivante.



On peut aussi se convaincre que ces énoncés ne sont pas toujours vrai en montrant qu'ils sont faux pour un cas particulier. Par exemple, il est facile de vérifier que

$$(1+2)^2 \neq 1^2 + 2^2$$
$$\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$$

Pour éviter cette erreur, se souvenir que l'« on peut distribuer la multiplication sur l'addition, les exposants sur un produit, mais jamais un exposant sur une somme. »

2.5.2 Autres erreurs avec des exposants

Toutes ces erreurs ont déjà été vue dans des examens ! Trois d'entre elles sont des variantes de la « fausse distributivité. »

$$B^{ab} \neq B^a B^b.$$

$$B^a \neq B^a B^b.$$

$$(B^a)^b \neq B^{(a+b)}.$$

$$\frac{B^a}{C^a} \neq \frac{B}{C}.$$

2.6 Logarithmes

2.6.1 Distribution de logarithmes

$$\log(A+B) \neq \log(A) + \log(B)$$

$$\log(AB) \neq \log(A)\log(B)$$

Ces erreurs sont peut-être due à une confusion avec une propriété similaire : le logarithme d'un produit est la somme du logarithme de ses facteurs :

$$\log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B).$$

3 Fonctions

3.1 Considérer l'application d'une fonction comme un produit

Plusieurs erreurs de manipulations impliquant des fonctions appliquées à leur arguments sont du à une confusion au sujet de la notation $f(x)$: quand f est une fonction, cette notation n'exprime pas un *produit* de f par x, mais l'application de la règle f à x. Si on pense que c'est un produit, cela peut nous mener à commettre certaines erreurs.

3.1.1 « simplifier »des fonctions

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{\cancel{f}(x)}{\cancel{f}(y)} = \frac{x}{y}$$

Erreur que l'on voit parfois avec les fonctions trigonométrique :

$$\frac{\sin(x)}{\sin(y)} = \frac{\cancel{\sin}(x)}{\cancel{\sin}(y)} = \frac{x}{y}$$

Même erreur avec les racines :

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{x}$$

Ou encore avec la factorielle :

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n\cancel{!}}{(n+1)\cancel{!}} = \frac{n}{n+1}$$

Se rappeler que l'on ne peut simplifier que des *facteurs* communs. L'application d'une fonction à son argument n'en fait pas un facteur, car ce n'est pas un produit !

3.1.2 Simplifier les arguments

$$\frac{\sin(5x)}{x^2} \neq \frac{\sin(5)}{x}.$$

3.1.3 Distribution de la fonction

Forme générale :

$$f(A+B) \neq f(A)+f(B)$$

Exemples :

$$\log(A+B) \neq \log(A)+\log(B)$$
$$\sin(A+B) \neq \sin(A)+\sin(B)$$

3.1.4 Dériver comme un produit

Confondre application et produit peut mener à l'erreur suivante :

$$\Big(\ln(x)\Big)' = \ln'(x)+\ln(x)' = \frac{1}{x}x+\ln(1) = 1+0 = 1$$

3.1.5 Changer l'ordre des arguments et des fonctions

Exemple

$$\sin(5x) \neq 5\sin(x)$$

peut sembler naturel si on pense que c'est le produit de sin avec 5 et avec x, ce qui n'est pas le cas.

3.2 Substitution et application de fonction

La substitution d'une expression algébrique dans à l'argument d'une fonction est la source de beaucoup d'erreurs, particulièrement quand on applique la définition de la dérivée.

Si $f(x) = x^2$, voici quelques erreurs typique dans l'évaluation

$$f(x+1) \neq x^2+1$$
$$f(x+h) \neq x^2+h^2.$$

3.3 Fonctions inverses

Ces erreurs sont plus subtiles. Il faut bien connaitre ou déterminer le domaine des fonctions impliquées quand on simplifie la composition de deux fonctions inverses.

Par exemple (c'est sans doute l'erreur de ce type la plus fréquente), on pense souvent que

$$\sqrt{A^2} = A$$

mais cela est vrai uniquement quand $A \geq 0$.

En général, si on tient compte de la possibilité que A soit négatif, on a plutôt que

$$\sqrt{A^2} = |A|.$$

4 Inégalités

4.1 Sens des inégalités

Principe général : si on applique une fonction croissante sur chaque membre d'une inégalité, l'inégalité est préservée. Si on applique une fonction décroissante sur chaque membre d'une inégalité, l'inégalité change de sens.

$$\begin{aligned} f \text{ croissante} &: x \leq y \iff f(x) \leq f(y) \\ f \text{ décroissante} &: x \leq y \iff f(x) \leq f(y) \end{aligned}$$

Il faut cependant être vigilant : le plus souvent, les fonctions ne sont pas toujours croissantes ou toujours décroissantes. Il faut donc limiter à un intervalle du domaine de la fonction où elle est soit croissante, soit décroissante.

Fonction croissantes qui apparaissent souvent :

- $\frac{1}{x}$ si $x > 0$

- x^2 si $x \geq 0$
- Fonction quadratique sur le bon intervalle
- $\log_b(x)$ si $x > 0$ et $b > 1$
- $\sqrt{x}$ si $x \geq 0$

4.2 L'élimination du carré

Un cas particulier fréquent d'erreur de sens d'inégalité est avec la fonction $f(x) = x^2$:

$$A^2 \geq 0 \nRightarrow A \geq 0$$

La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas toujours croissante ou toujours décroissante. Elle est toujours croissante uniquement pour $x \geq 0$.

4.3 Distributivité sur la somme

$$|x+y| = |x| + |y|$$

Si cette propriété était valable, on aurait pour $x = -2$ et $y = 2$

$$\begin{aligned} |-2+2| &= |-2| + |2| \\ |0| &= 2+2 \\ 0 &= 4 \end{aligned}$$

ce qui est faux.

La source probable de cette erreur est la ressemblance avec la propriété

$$|AB| = |A||B|$$

qui est valable pour la multiplication, mais qui ne l'est pas pour l'addition. C'est une des nombreuses variantes de la fausse distributivité.

4.4 Autres erreurs impliquant des inégalités

$$A \leq B \not\Longrightarrow \sin(A) \leq \sin(B)$$

Cependant,

$$0 \leq A \leq B \leq \pi/2 \not\Longrightarrow \sin(A) \ \leq \sin(B)$$

est vrai car restreint à un intervalle où la fonction $\sin(x)$ est croissante.

5 Erreurs dans le calcul de limites

Outre les erreurs algébriques ou d'utilisation de fonctions, une erreur fréquente de calcul de limite suit ce modèle :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} &= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} && \text{(erreur ici)} \\ &= \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{2+2} && \text{(erreur ici)} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Le problème est un problème de *types* : sans doute pour faire un calcul plus court, on utilise la relation d'égalité entre des objets mathématiques ne pouvant être égal, comme des nombres et des expressions algébriques par exemple.

6 Dérivées

6.1 Substituer et dériver

Raisonnement erroné : soit f une fonction dérivable en a. Que vaut $f'(a)$? Comme $f(a)$ est une constante, alors

$$\frac{df(a)}{dx} = 0.$$

Notez la conclusion contre-intuitive : si ce raisonnement est valable, la pente de la tangente à une fonction est toujours nulle ! Ainsi, toutes les fonctions sont constantes !

7 Intégrales

Beaucoup d'erreur dans le calcul d'intégrales définies ou indéfinies sont en fait dues à des erreurs algébriques ou autre.

7.1 Confusion entre intégrales définie et indéfinie

Cette erreur est très similaire à la confusion de type qui cause des erreurs dans le calcul de limites. Voici un exemple

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(x)\,dx &= \int \sin(x)\,dx \qquad \text{(erreur ici)} \\
&= -\cos(x)\Big|_0^\pi \qquad \text{(erreur ici)} \\
&= -\cos(\pi) - -\cos(0) \\
&= -(-1) - (-0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Les deux erreurs sont similaires : on écrit une égalité entre une fonction (l'intégrale indéfinie) et un nombre (le résultat de l'intégrale définie ou l'évaluation d'une expression algébrique pour des valeurs données de la variable).

8 Principes généraux pour éviter ces erreurs

- Connaitre et comprendre les propriétés algébriques. Pour chaque propriété, être capable de la dire en mots et de produire des exemples. Idéalement, être capable de produire une justification géométrique des propriété les plus importantes.
- Savoir vérifier si une égalité est vraie ou fausse en général : soit sur un cas particulier, soit par un raisonnement géométrique (figure ou analyse des unités), soit en la déduisant d'autres propriétés connues.
- Toujours pouvoir nommer le type d'objet mathématique de chaque côté d'une égalité : nombre, vecteur, fonction, polynôme, expression algébrique, etc.
- Se demander à chaque étape de simplification ou de calcul quelle propriété on utilise. On devrait toujours pouvoir dire laquelle ! Si on fait plusieurs étapes d'un coup en laissant quelques étapes implicites, il faut quand même pouvoir dire quelles propriétés sont utilisés, comme si elles étaient explicites.
- Dans le doute, passer par un autre raisonnement ! (comme en français : si on ne sait écrire un mot ou l'accorder correctement, on trouve des synonymes que l'on connait !). Il y a souvent plusieurs démarches possibles pour simplifier une expression donnée.