Prétest 4

Question 1

Effectuer les calculs suivant et donner le résultat sous la forme $a+bi$.

a) $(2+i)^2$

b) $\|3+4i\|$

c) $\|2e^{i\pi/4}\|$

d) $\overline{3+4i}$

e) $\mathrm{Re}(\pi+ei)$

f) $\mathrm{Im}\left(e^{i5\pi/6}\right)$

Question 2

a) Donner la représentation polaire (la forme $Ae^{i\theta}$) du nombre complexe

$$z=\sqrt{3}-i.$$

b) Donner la représentation cartésienne (la forme $a+bi$) du nombre complexe

$$z=\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}.$$

Question 3

Effectuer les calculs suivants. Donner les réponses sous la forme $a+bi$.

a) $\dfrac{1+2i}{-2-3i}$

b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{801}$

c) $(2-3i)(4+i)$

d) $\dfrac{1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7}{i}$

e) $(1+i)e^{-i\pi/4}$

f) $(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))^4$

g) $e^{\ln(2)+i\pi}$

Question 4

Trouver toutes les racines 6^e^ de -1 et les représenter sur le cercle unité. (Ind. commencer par écrire -1 sous forme polaire).

Question 5 (10 points)

Décomposer en facteurs premiers le polynôme

$$iz^3+z^2+iz+1.$$

Question 6

Trouver toutes les solutions de l'équation

$$z^5-z^4+z^3-z^2+z^1-1=0.$$

Indice : $1/2+\sqrt{3}i/2$ est une solution.

Question 7

Donner le centre, le facteur et l'angle de la similitude directe définie par l'équation

$$T(z)=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+1.$$

Question 8

L'objectif de cette question est de vous montrer qu'il est possible de prolonger la fonction $\sin(x)$ sur les nombres complexes en utilisant la formule d'Euler $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

a) Vérifier à l'aide de la relation d'Euler que

$$\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

b) On généralise la relation démontrée en a pour définir sin sur les complexes. Pour un nombre complexe z quelconque, on définit la fonction sin par

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Calculer $\sin(0)$, $\sin(i)$ et $\sin(1+i)$ – simplifier le plus possible.

c) On définit $\cos(z)$ de manière similaire par

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Montrer que

$$\cos^2(z)+\sin^2(z)=1.$$

Solutions

Question 1

a) $3+4i$ d) $3-4i$

b) 5 e) π

c) 2 f) $1/2$

Question 2

a)
$$\begin{aligned}\|z\| &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}\\ &= \sqrt{9+1}\\ &= \sqrt{10}\end{aligned}$$

$\arg(z) = \operatorname{atan}(-1/\sqrt(3)) = -\pi/6$
Donc $\sqrt{10}e^{i\pi/6}$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt{2}e^{-i3\pi/4} &= \sqrt{2}\Big(\cos(-3\pi/4)+i\sin(-3\pi/4)\Big)\\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= -1-i\end{aligned}$$

Question 3

a) $-\frac{8}{13}-\frac{i}{13}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{-i\pi/4}$. L'angle associé au nombre complexe donnée et $-\pi/4$ correspond à $1/8$ième de tour. Comme $801 = 8\cdot 100+1$ (division avec reste de 801 par 8), on a que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{801} &= \left(e^{-i\pi/4}\right)^{801}\\ &= e^{-i801\pi/4}\\ &= e^{-i(8\cdot 100+1)\pi/4}\\ &= e^{-i(8\cdot 100\pi/4}2^{-i\pi/4}\\ &= e^{-i(100\cdot 2\pi}2^{-i\pi/4}\\ &= (1)2^{-i\pi/4}\\ &= 2^{-i\pi/4}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

c) $11-10i$

d) 0

e) $\sqrt{2}$

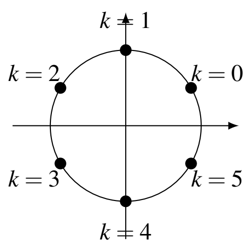
f)
$$\begin{aligned}\left(e^{i\pi/12}\right)^4 &= e^{i\pi/3}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

g) $e^{\ln(2)+i\pi} = e^{\ln(2)}e^{i\pi} = (2)(-1) = -2$

Question 4

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{-1} &= \sqrt[6]{e^{i(\pi+2\pi k)}}\\ &= e^{i(\pi+2\pi k)/6}\\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)}\end{aligned}$$

où $k\in\mathbb{Z}$. Les racines 6e de -1 sont



Question 5
i(z-i)(z-i)(z+i)

Question 6
$1/2+\sqrt{3}i/2$ est une solution, donc $1/2-\sqrt{3}i/2$ en est une aussi. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Big((z-(1/2+\sqrt{3}i/2)\Big)\Big((z-(1/2+\sqrt{3}i/2)\Big)\\ = z^2-z+1\end{aligned}$$

doit être un facteur de $z^5-z^4+z^3-z^2+z^1-1$. En divisant, on trouve

$$z^5-z^4+z^3-z^2+z-1 = (z^2-z+1)(z^3-1).$$

Les autres zéros sont donc des zéros de z^3-1. Comme $z=1$ est un zéro, on peut factoriser :

$$z^3-2z^2+2z-1 = (z-1)(z^2+z+1).$$

On trouve les derniers zéro avec la quadratique : $z = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

Question 7
Centre : $-i/\sqrt{3}$, facteur : 2, angle : $\pi/3$

Question 8

a)
$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= \cos(\theta)+i\sin(\theta)\\ e^{-i\theta} &= \cos(\theta)-i\sin(\theta)\\ e^{i\theta}-e^{-i\theta} &= 2i\sin(\theta)\\ \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} &= \sin(\theta)\end{aligned}$$

b) $\sin(0)=0$
$\sin(i) = (1/e-e)/2i = -(1/e-e)i/2$
$\sin(1+i) = \frac{e^i}{2ei}-\frac{e}{2e^i i}$

c)
$$\begin{aligned}\cos^2(z)+\sin^2(z) &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2\\ &= \frac{e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{4}-\frac{e^{2iz}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{4}\\ &= \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}-\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}\\ &= \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}-\left(e^{2iz}-2+e^{-2iz}\right)}{4}\\ &= \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}-e^{2iz}-e^{-2iz}+4}{4}\\ &= \frac{4}{4}\\ &= 1\end{aligned}$$