Département de mathématiques — Cégep de Saint-Laurent
Algèbre linéaire et géométrie vectorielle — 201-NYC — Automne 2014 — Yannick Delbecque

Prétest 2

Question 1 (20 points)

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation

$$\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{-z}{2}.$$

a) Déterminer la distance entre $\mathscr{D}$ et le point $P = (1,2,3)$.

b) Trouver le point B de $\mathscr{D}$ qui est le plus près de l'origine.

Question 2 (20 points)

Soit $A = (2,1,3)$, $B = (1,-1,2)$ et $C = (0,1,2)$ trois points dans $\mathbb{R}^3$.

a) Donner l'équation normale du plan $\mathscr{P}$ qui passe par A, B et C.

b) Trouver l'équation paramétrique du plan perpendiculaire à $\mathscr{P}$ qui passe par B et C.

Question 3 (20 points)

Soit $\mathscr{D}$ la droite ayant comme équation vectorielle

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t(2,0,-3)$$

et $\mathscr{P}$ le plan d'équation

$$x+2y+z = 1.$$

a) Déterminer le point de croisement entre la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$.

b) Trouver l'angle entre la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$.

Question 4 (10 points)

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+t. \end{cases}$$

Trouver l'équation d'une droite à distance 2 de $\mathscr{D}$ et ayant pour vecteur directeur $\vec{v} = (1,1,1)$ (ind. pensez à la distance entre deux droites gauches)

Question 5 (30 points)

Résoudre les systèmes d'équations suivants. Donner *toutes* les solutions.

a) $\begin{cases} x+2y+z = 1 \\ x-y+2z = 2 \\ 3x+2y+z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y = 1 \\ 3x+y = 2 \\ 4x+y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 3x+2y+z = 3 \end{cases}$

Question 6 (10 points)

a) Donner la forme échelonnée réduite (ERL) de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En considérant la matrice de la question précédente comme celle d'un système à 4 inconnues x,y,z,u, décrire l'ensemble solution sous forme paramétrique.

Question 7

Déterminer si les vecteurs $\vec{u} = (2,-2,1)$, $\vec{v} = (3,-2,1)$ et $\vec{w} = (-4,2,-1)$ forment une base en résolvant un système d'équation linéaire. Résoudre le système à l'aide de matrices en le réduisant à sa forme échelonée. Si les vecteurs ne sont pas indépendants, trouver une combinaison linéaire d'un des vecteurs en fonction des deux autres.

Question 8 (extra pour pratiquer)

Soit les vecteurs $\vec{u} = (2,-3)$ et $\vec{v} = (-3,1)$. Exprimer le vecteur $(2,3)$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Vérifier que si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ en vérifiant que chacune des conditions de la définition du concept de base est vraie.

Solutions

Question 1

a) Le vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{v}=(2,1,-2)$ et la droite passe par le point $A=(1,-1,0)$. $d=\|\overrightarrow{AP}-\text{proj}(\overrightarrow{AP},\vec{v})\|=\sqrt{17}$

(Calculs partiels : $\overrightarrow{AP}=(0,3,3,)$, $\text{proj}(\overrightarrow{AP},\vec{v})=(-2/3,-1/3,2/3)$, $\overrightarrow{AP}-\text{proj}(\overrightarrow{AP},\vec{v})=\overrightarrow{AP}-\text{proj}(\overrightarrow{AP},\vec{v})=(2/3,10/3,7/3)$.

b) Le point B est $B=A+\text{proj}(\overrightarrow{AO},\vec{v})=(7/9,-10/9,2/9)$.

Question 2

a) On trouve une normale au plan

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}.$$

Le point A est un point sur le plan.

On trouve l'équation normale : soit $P=(x,y,z)$ un point quelconque sur le plan. On doit avoir que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}&=0\\(x-2,y-1,z-3)\cdot(2,1,-4)&=0\\2(x-2)+(y-1)-4(z-3)&=0\\2x+y-4z&=-7\end{aligned}$$

L'équation normale est donc

$$2x+y-4z=-7.$$

b) Pour trouver l'équation paramétrique du plan cherché, on doit avoir un point sur ce plan et deux vecteurs directeurs linéairement indépendants.

Le point B est un point sur le plan.

Comme le plan passe par B et C, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur. Comme le plan cherché est perpendiculaire à $\mathscr{P}$, le vecteur $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur. On trouve donc l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases}x=1+2s-t\\y=-1+s+2t\\z=2-4s.\end{cases}$$

Question 3

a) Soit $(x,y,z)=(1,2,3)+t(2,0,-3)$. Ce point est aussi sur le plan ssi il satisfait l'équation $x+2y+z=1$. On doit donc avoir que

$$(1+2t)+2(2)+(3-3t)=1,$$

On trouve que $t=7$.

Le point de croisement est donc

$$(x,y,z)=(1,2,3)+(7)(2,0,-3)=(15,2,-18).$$

b) Un vecteur directeur de la droite est $(2,0,-3)$ et un vecteur normal au plan est $\vec{n}=(1,2,1)$. L'angle entre la droite et le plan est

$$\pi/2-\text{ l'angle entre la droite et }\vec{n}$$

L'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{n}$ est

$$\phi=\text{acos}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)=\text{acos}\left(\frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{13}}\right).$$

L'angle entre la droit et le plan est donc $\pi/2-\phi$.

Question 4

La droite $\mathscr{D}$ a comme vecteur directeur $\vec{u}=(1,-2,1)$ et passe par le point $A=(1,-1,3)$. Si on veut une droite à distance 2, on peut prendre un point de $\mathscr{D}$, de déplacer d'une distance 2 dans la direction d'un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui nous donne un point B à distance 2 de $\mathscr{D}$. La droite passant par ce point B et ayant comme vecteur directeur $\vec{v}$ est, par construction, à distance 2.

$\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=(-3,0,3)$.

$$\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=\left((-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$B=A+2\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1,-1,\frac{\sqrt{2}}{2}+3\right)$$

Question 5

a) $x=1$, $y=-1/5$, $z=2/5$

b) $x=1$, $y=-1$

c) $\begin{cases}x=t+1\\y=-2t\\z=t\end{cases}$

Question 6

a) $\begin{pmatrix}1&0&0&-4&-3\\0&1&0&4&4\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

b) $\begin{cases}x=-3+4t\\y=4-4t\\z=0\\u=t\end{cases}$

Question 7

On commence par vérifier si les vecteurs sont linéairement indépendants. On utilise le théorème sur l'indépendence linéaire : on montre que si $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$, alors $x,y,z=0$.

L'équation vectorielle $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$ devient, quand on sépare les composantes, le système d'équation linéaires

$$\begin{cases}2x+3y-4z=0\\-2x-2y+2z=0\\x+y-z=0\end{cases}$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\begin{pmatrix}2&3&-4&0\\-2&-2&2&0\\1&1&-1&0\end{pmatrix}$$

On échelonne cette matrice :

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}2&3&-4&0\\-2&-2&2&0\\1&1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_3}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\-2&-2&2&0\\2&3&-4&0\end{pmatrix}\\&\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2+2L_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&0&0&0\\2&3&-4&0\end{pmatrix}\\&\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_1}\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\0&0&0&0\\0&1&-2&0\end{pmatrix}\\&\xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\&\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-L_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il y a donc plusieurs solutions. Une solution doit satifaire les relations $y=2z$ et $x=-z$. Par exemple $x=-1$, $y=2$ et $z=1$ est une solution possible où $x,y,z\neq0$. Les vecteurs ne sont donc pas linéairement indépendants.

Pour trouver une combinaison linéaire, écrivons la relation vectorielle obtenue quand on utilise la solution particulière que nous venons de donner :

$$-\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}.$$

Pour trouver une combinaison linéraire, on peut simplement isoler $\vec{u}$. On trouve

$$\vec{u}=2\vec{v}+\vec{w}.$$

(On pourrait aussi isole $\vec{v}$ ou $\vec{w}$.)

Question 8

Pour décomposer $(2,3)$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on doit trouver x et y tels que

$$(2,3)=x\vec{u}+y\vec{v}$$

$$\begin{cases}2x-3y=2\\-3x+y=3\end{cases}$$

La matrice du système est

$$\begin{pmatrix}2&-3&2\\-3&1&3\end{pmatrix}$$

En réduisant, on trouve la forme ERL :

$$\begin{pmatrix}1&0&-\frac{11}{7}\\0&1&-\frac{12}{7}\end{pmatrix}.$$

On montre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants. Si $x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{0}$, en séparant les composantes cette équation vectorielle devient le système d'équation

$$\begin{cases}2x-3y=0\\-3x+y=0\end{cases}$$

La matrice du système est

$$\begin{pmatrix}2&-3&0\\-3&1&0\end{pmatrix}$$

En réduisant, on trouve la forme ERL :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

La solution est donc $x=y=0$, les vecteurs sont donc linéairement indépendants.

Pour montrer que tout vecteur (a,b) de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on doit résoudre

$$(a,b)=x\vec{u}+y\vec{v}$$

donc trouver les valeurs de x et y étant donnée celles de a et b. Le système d'équation que l'on trouve en séparant les composantes de cette équation vectorielle est

$$\begin{cases}2x-3y=a\\-3x+y=b\end{cases}$$

et la matrice associée est

$$\begin{pmatrix}2&-3&a\\-3&1&b\end{pmatrix}.$$

En réduisant, on trouve la matrice

$$\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{7}a-\frac{3}{7}b\\0&1&-\frac{3}{7}a-\frac{2}{7}b\end{pmatrix}$$

La solution est donc

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{7}a-\frac{3}{7}b\\y=-\frac{3}{7}a-\frac{2}{7}b\end{cases}.$$

Il est donc possible d'écrire n'importe quel vecteur (a,b) comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.