MAT 201-NYA
Calcul différentiel
Vanessa Bergeron-Laperrière

Pratique d'examen 3

Aucune documentation
Calculatrice non permise

Question 1

Voici le tableau de variation (partiellement rempli) d'une fonction f. Esquisser le graphe de cette fonction.
(Dans le tableau ci-dessous, indiquez les infos que vous pouvez déduire à propos f et vous servant à tracer son graphique)

x	$-\infty$	-3		-1		1		3	∞
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2		0		-2		$\nexists$ A.V.	-1

Question 2

Trouver les intervalles de croissance, les intervalles de décroissance et les coordonnées des extremums relatifs de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x^2+3}{1-x}$$

Question 3

Analyser la concavité et trouver les points d'inflexion de la fonction suivante : $f(x) = (1-3x)^{7/3}$

Question 4

Faire l'analyse complète des fonctions suivantes, c'est-à-dire trouver leur domaine et asymptotes (s'il y a lieu), étudier leur croissance et concavité, trouver les extremums et points d'inflexion, puis esquisser leur graphique.

a) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 12$

b)
$$g(x) = \frac{3x^2-1}{x^3}\ ; \quad g'(x) = \frac{3-3x^2}{x^4}; \quad g''(x) = \frac{6(x^2-2)}{x^5}$$

Question 5

Pour son party de bureau de Noël (toujours tellement d'avance !), Mélissa doit apporter un cadeau pour un échange. La forme du cadeau en question sera un prisme à base carrée et elle dispose de 54 dm^2 de papier d'emballage. Quelles devraient être les dimensions du cadeau si elle veut impressionner ses collègues en apportant le cadeau le plus volumineux possible ? (Supposez qu'elle ne fait que coller du papier d'emballage sur toute la surface du cadeau pour l'emballer.)

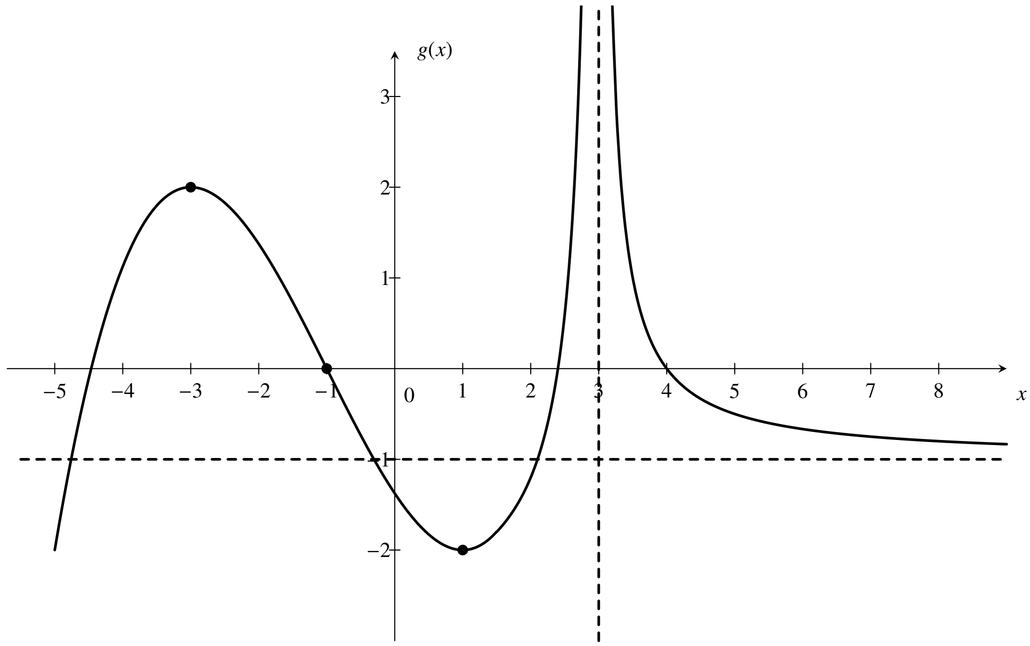
Question 6

On gonfle un ballon sphérique à l'aide d'un compresseur soufflant de l'air à un taux de 12 cm^3/s. Sachant que le volume d'une sphère de rayon r est donné par $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, à quel taux varie le rayon du ballon lorsque le rayon atteint 8 cm ?

Solutions

Question 1
Tableau complété :

x	$-\infty$	-3		-1		1		3	∞
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow \cap$	2 max	$\searrow \cap$	0 infl.	$\searrow \cup$	-2 min	$\nearrow \cup$	$\nexists$ A.V.	$\searrow \cup -1$ A.H.



Question 2
$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)'(1-x) - (1-x)'(x^2+3)}{(1-x)^2} = \frac{2x(1-x) - (-1)(x^2+3)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{2x - 2x^2 + x^2 + 3}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)^2} = \frac{-(x^2 - 2x - 3)}{(1-x)^2} = \frac{-(x-3)(x+1)}{(1-x)^2}$$

Valeurs critiques :
- $f'(x)$ existe partout dans $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$

x	$-\infty$	-1		1		3	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	2 min	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	-6 max	$\searrow$

Ainsi,
f est croissante sur $[-1, 1[\cup]1, 3]$
f est décroissante sur $]-\infty, -1] \cup [3, \infty[$
Il y a un minimum au point $(-1, 2)$ et un maximum au point $(3, -6)$

Question 3
$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{7}{3} \cdot (1-3x)^{4/3} \cdot (-3) = -7 \cdot (1-3x)^{4/3}$$
$$f''(x) = -7 \cdot \frac{4}{3} \cdot (1-3x)^{1/3} \cdot (-3) = 28 \cdot (1-3x)^{4/3}$$

Valeurs critiques :

- $f''(x)$ existe partout sur $\mathbb{R}$
- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$	$1/3$	∞
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	0 infl.	$\cap$

Ainsi,
f est concave vers le haut sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$
f est concave vers le bas sur $\left[\dfrac{1}{3}, \infty\right[$
Le point $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$ est un point d'inflexion

Question 4

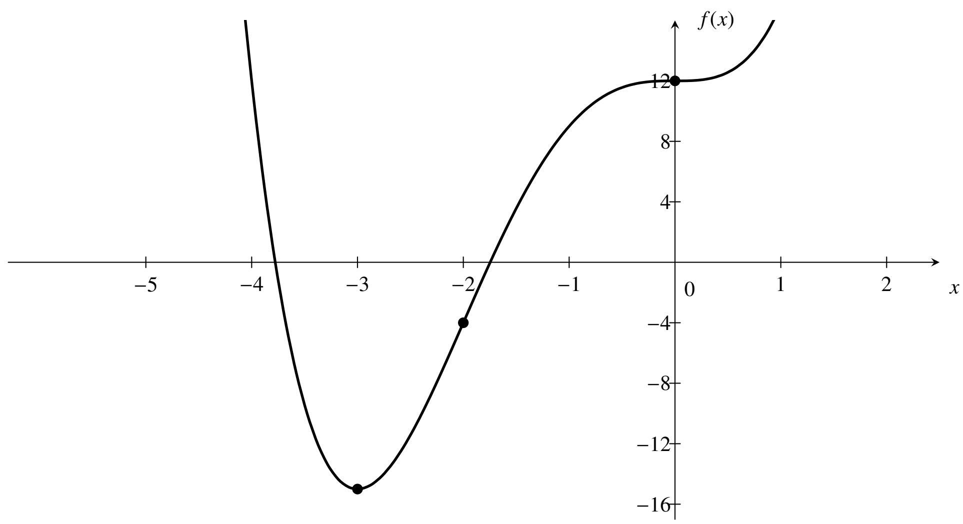
a) $\text{dom} f = \mathbb{R}$, et donc pas d'asymptotes verticales.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4 + 4x^3 + 12 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4(1 + 4/x + 12/x^4) = \infty$, donc par d'asymptotes horizontales.

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$ $\quad$ $f'(x)$ existe sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$

$f''(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x+2)$ $\quad$ $f''(x)$ existe sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

x	$-\infty$	-3		-2		0	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	∞ $\searrow \cup$	-15 min	$\nearrow \cup$	-4 infl	$\nearrow \cap$	12 infl	$\nearrow \cup$ ∞



b) $\mathrm{dom}\, g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

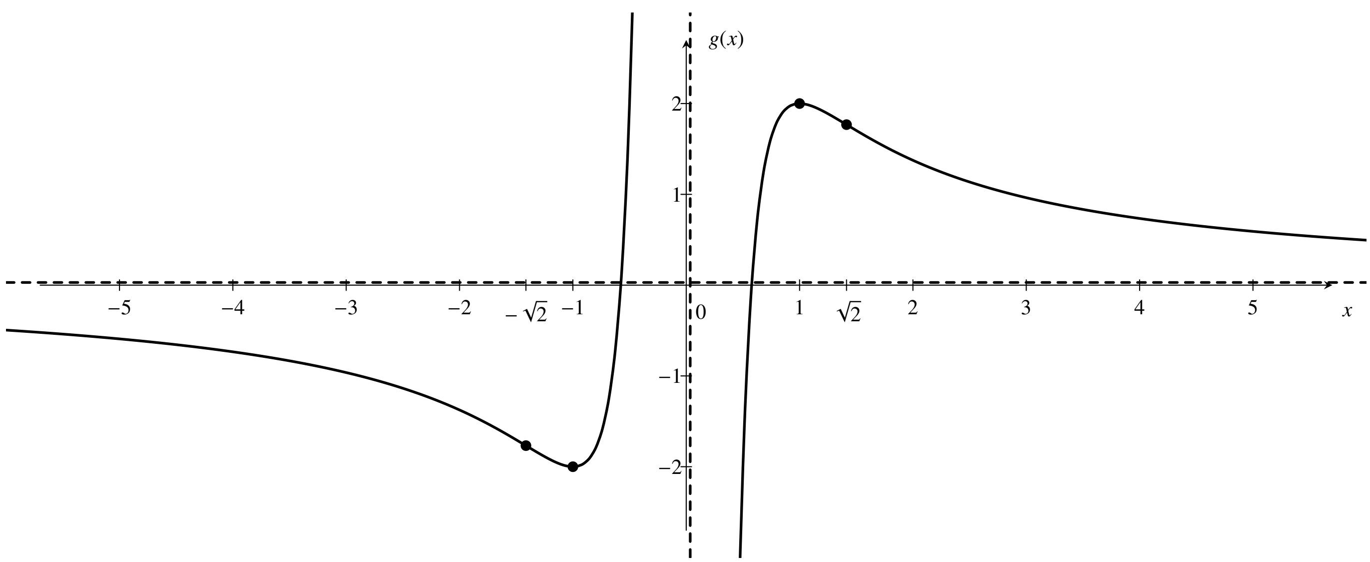
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2-1}{x^3} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2-1}{x^3} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$, donc asymptote verticale en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2-1}{x^3} \overset{\infty/\infty}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2(3-1/x^2)}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3-1/x^2}{x} = \dfrac{3}{\pm\infty} = 0$, donc asymptote verticale en $y = 0$ dans les deux directions.

$g'(x) = \dfrac{3(1-x)(1+x)}{x^4}$ $\quad$ $g'(x)$ existe sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$g''(x) = \dfrac{6(x^2-2)}{x^5}$ $\quad$ $g''(x)$ existe sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad$ $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$	∞
$g'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0 $\searrow\cap$ A.H	$\dfrac{-5}{2\sqrt{2}}$ infl.	$\searrow\cup$	-2 min	$\nearrow\cup$	$\nexists$ A.V.	$\nearrow\cap$	2 max	$\searrow\cap$	$\dfrac{-5}{2\sqrt{2}}$ infl.	$\searrow\cup$ 0 A.H.



Question 5

Soit x la mesure (en dm) du côté de la base et y celle de la profondeur (en dm). $\quad$ $x > 0$ et $y > 0$

Contrainte :

Aire $= 2x^2 + 4xy = 54\text{dm}^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy = 27 \Leftrightarrow 2xy = 27 - x^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{27-x^2}{2x}$

On veut maximiser le volume $V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot \dfrac{27-x^2}{2x} = \dfrac{27x - x^3}{2}$

$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \dfrac{27-3x^2}{2} = \dfrac{3(9-x^2)}{2} = \dfrac{3(3-x)(3+x)}{2}$ $\quad$ existe sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (à rejeter) ou $x = 3$

$\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{3\cdot(-2x)}{2} = -3x$, d'où $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=3} = -9 < 0$. Par le test de la dérivée seconde, il y a un maximum en $x = 3$.

Si $x = 3$, alors $y = \dfrac{27-9}{6} = 3$.

Les dimensions de la boîte qui maximisent son volume sont 3 dm × 3 dm × 3 dm.

Question 6

Connu : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 12\ \mathrm{cm}^3/s$

Cherché : $\left.\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=8}$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4\pi r^3}{3}\\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)\\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{4\pi\cdot 3r^2}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= 4\pi r^2\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{4\pi r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\cdot 12 = \frac{3}{\pi r^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=8} &= \frac{3}{\pi(8)^2}\\
&= \frac{3}{64\pi}\ \mathrm{cm}/s
\end{aligned}
$$