MAT 201-NYA
Calcul différentiel
Vanessa Bergeron-Laperrière

Pratique d'examen 2

Aucune documentation
Calculatrice non permise

Question 1

Calculer la dérivée de la fonction suivante en $x = 1$ en utilisant la **définition** de la dérivée (c'est-à-dire à l'aide des limites !) :

$$f(x) = \sqrt{3x+1}.$$

Question 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes et simplifier les résultats.

a) $f(x) = 5x^4 + \sqrt{2}x^3 + \sqrt[3]{8x^4} - \pi^2 - 2x + 5$

b) $g(x) = \sqrt[3]{(3x^4 - 5x)^5}$

c) $f(t) = (t^3 + 5)^6(4t - 3)^{10}$

d) $h(x) = 2 \cdot \left(\dfrac{3x^2 + 4}{1 - x}\right)$

e) $g(t) = \dfrac{2t^2 - 1}{\sqrt{t^2 + 2}}$

Question 3

Soit la fonction $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 2$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de x la droite tangente à la courbe de f est-elle horizontale ?

b) Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$.

Question 4

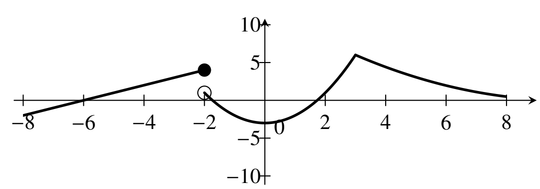
Calculer $\dfrac{dy}{dx}$ à partir de l'équation implicite suivante : $2x^3 + x^2y = y^3 - 5$.

Question 5

Calculer $f^{(3)}(x)$ si $f(x) = (2x^3 + 1)^5$

Question 6

Soit la fonction f illustrée sur le graphique suivant :



a) Pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée de f est-elle nulle ?

b) Identifier les valeurs de x pour lesquelles f n'est pas dérivable et donner une raison.

Solutions

Question 1

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h} \cdot \left(\frac{\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1}}{\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(3(x+h)+1)-(3x+1)}{h(\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x+3h+1-3x-1}{h(\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3}{(\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1})} \\
&= \frac{3}{\sqrt{3(x+0)+1} + \sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}
\end{aligned}
$$

Ainsi $f'(1) = \dfrac{3}{2\sqrt{3(1)+1}} = \dfrac{3}{4}$.

Question 2

a)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5\cdot 4x^3 + \sqrt{2}\cdot 3x^2 + \sqrt[3]{8}\cdot \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - 0 - 2 + 0 \\
&= 20x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 2\cdot\frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - 2 \\
&= 20x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + \frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - 2
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= (3x^4-5x)^{\frac{5}{3}} \\
g'(x) &= \frac{5}{3}(3x^4-5x)^{\frac{2}{3}} \cdot (3x^4-5x)' \\
&= \frac{5}{3}(3x^4-5x)^{\frac{2}{3}}(12x^3-5) \\
&= \frac{5}{3}\sqrt[3]{(3x^4-5x)^2}\cdot(12x^3-5)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \left[(t^3+5)^6\right]'(4t-3)^{10} + (t^3+5)^6\left[(4t-3)^{10}\right]' \\
&= 6(t^3+5)^5(3t^2)\cdot(4t-3)^{10} + (t^3+5)^6\cdot 10(4t-3)^9(4) \\
&= 18t^2(t^3+5)^5(4t-3)^{10} + 40(t^3+5)^6(4t-3)^9 \\
&= 2(t^3+5)^5(4t-3)^9\left[9t^2(4t-3)+20(t^3+5)\right] \\
&= 2(t^3+5)^5(4t-3)^9(36t^3-27t^2+20t^3+100) \\
&= 2(t^3+5)^5(4t-3)^9(56t^3-27t^2+100)
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= 2\left[\frac{(3x^2+4)'(1-x)-(3x^2+4)(1-x)'}{(1-x)^2}\right] \\
&= 2\left[\frac{6x(1-x)-(3x^2+4)(-1)}{(1-x)^2}\right] \\
&= 2\left[\frac{6x-6x^2+3x^2+4}{(1-x)^2}\right] \\
&= \frac{2(-3x^2+6x+4)}{(1-x)^2} = \frac{-2(3x^2-6x-4)}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{(2t^2-1)'[\sqrt{t^2+2}]-(2t^2-1)[\sqrt{t^2+2}]'}{(\sqrt{t^2+2})^2} \\
&= \frac{4t\cdot\sqrt{t^2+2}-(2t^2-1)\left[\frac{2t}{2\sqrt{t^2+2}}\right]}{(t^2+2)} \\
&= \frac{\frac{4t(\sqrt{t^2+2})^2}{\sqrt{t^2+2}}-\frac{t(2t^2-1)}{\sqrt{t^2+2}}}{(t^2+2)} \\
&= \frac{4t(t^2+2)-(2t^3-t)}{(t^2+2)\sqrt{t^2+2}} \\
&= \frac{4t^3+8t-2t^3+t}{(t^2+2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2t^3+9t}{(t^2+2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{t(2t^2+9)}{(t^2+2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Question 3

a) Calculons d'abord f' :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 2\cdot\frac{9}{2}x - 12 \\
&= 3x^2 - 9x - 12 \\
&= 3(x^2-3x-4)
\end{aligned}
$$

On a donc $f'(x) = 3(x^2 - 3x - 4) = 3(x-4)(x+1)$.
Ainsi, la droite tangente sera horizontale en x si et seulement si $f'(x) = 0 \iff 3(x-4)(x+1) = 0 \iff x = 4$ ou $x = -1$.

Réponse : La droite tangente sera horizontale en $x = -1$ et en $x = 4$.

b) Par le calcul de la question précédente, on a $f'(x) = 3(x^2 - 3x - 4)$.

$$\begin{aligned}
f'(0) &= 3(0^2 - 3(0) - 4) = -12 \\
f(0) &= (0)^3 - \frac{9}{2}(0)^2 - 12(0) + 2 \\
y &= mx + b \\
&= f'(0)x + b \\
&= -12x + b \\
f(0) &= -12(0) + b \\
2 &= 0 + b
\end{aligned}$$

L'équation de la droite tangente à la courbe de f en $x = 0$ est $y = -12x + 2$.

Question 4

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(2x^3 + x^2y\right) &= \frac{d}{dx}\left(y^3 - 5\right) \\
2 \cdot 3x^2 + \frac{d}{dx}\left(x^2y\right) &= 3y^2\frac{dy}{dx} - 0 \\
6x^2 + \left(2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right) &= 3y^2\frac{dy}{dx} \\
6x^2 + 2xy &= 3y^2\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} \\
2x(3x + y) &= (3y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2x(3x+y)}{3y^2 - x^2}
\end{aligned}$$

Question 5

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5(2x^3+1)^4 \cdot 6x^2 \\
&= 30x^2(2x^3+1)^4 \\
f''(x) &= 30\left[2x(2x^3+1)^4 + x^2 \cdot 4(2x^3+1)^3 \cdot 6x^2\right] \\
&= 30\left[2x(2x^3+1)^4 + 24x^4(2x^3+1)^3\right] \\
&= 60x(2x^3+1)^3\left[(2x^3+1) + 12x^3\right] \\
&= 60x(2x^3+1)^3(14x^3+1) \\
f^{(3)} &= 60\left[(1)(2x^3+1)^3(14x^3+1) + x \cdot 3(2x^3+1)^2 \cdot 6x^2(14x^3+1) + x(2x^3+1)^3 \cdot 42x^2\right] \\
&= 60(2x^3+1)^2\left[(2x^3+1)(14x^3+1) + 18x^3(14x^3+1) + 42x^3(2x^3+1)\right] \quad \text{vous pouvez arrêter ici, mais si on simplifie, on obtient :} \\
&= 60(2x^3+1)^2(364x^6 + 76x^3 + 1)
\end{aligned}$$

Question 6

a) $x = 0$

b) $x = -2$ car f y est discontinue

$x = 3$ car il y a un pic, donc $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ et $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sont différentes.