Pratique d'examen 1

Aucune documentation
Calculatrice non permise

Question 1
Trouver le domaine des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x^2+5x-3}$

b) $g(x) = \sqrt{(x+1)(x-4)} + \dfrac{2x+3}{x-5}$

Question 2
Si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ et $h(x) = \dfrac{(x-1)}{3x}$, donner (en simplifiant) la fonction $(h \circ g \circ f)(x)$.

Question 3
Soit une fonction f continue ayant pour domaine $\text{dom } f = [0, \infty[$. Expliquer pourquoi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas. De plus, donner un exemple d'une telle fonction pour illustrer l'explication.

Question 4
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+4}\cdot(x-3)}{(2-x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^4-5x^3-x^2+4x-3}{9x^3-7x^2-3x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+9}{(3-x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{\frac{7}{x}-\frac{x}{7}}{x^2+4x-21}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{8x^6+3x^2+2}}{3x^3+5x+12}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{8}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{4}{x-1}$

Question 5
Déterminer si les fonctions suivantes sont continues aux points donnés. Si la fonction est discontinue, indiquer le type de discontinuité.

a) $g(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$, au point $x = 2$.

b) $h(x) = \begin{cases} 2x^2+3 & \text{si } x < -1 \\ 8-x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$, au point $x = -1$.

Question 6
Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^3+9x^2+10x+5}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ -x^2-2x+a & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Quelle(s) valeur(s) doit prendre a pour rendre la fonction f continue en $x = -1$?

Question 7
Trouver, si elle en a, toutes les asymptotes verticales ET horizontales de la fonction suivante : $g(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+1)}{(2x-1)(3x+3)(2-x)}$.

Question 8
Esquisser UNE fonction f continue partout, sauf **peut-être** en $x = -2$, 0, 1 et 2, et satisfaisant à TOUTES les conditions suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$
2. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 2$
3. $f(-2) = 3$
4. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$
6. $f(0) = 2$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2$
8. $1 \notin \text{dom} f$
9. $\lim\limits_{x\to 1}$ existe
10. $\lim\limits_{x\to 2} \nexists$
11. $\lim\limits_{x\to \infty} = \infty$

Solutions

Question 1

a) $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3) = 0 \iff x = -3 \text{ ou } x = \dfrac{1}{2}$

$x^2 + 4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1/2\}$.

b) $\operatorname{dom}\left(\dfrac{2x+3}{x-5}\right) = \mathbb{R}\setminus\{5\}$

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,4[$	4	$]4,\infty[$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-4)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\operatorname{dom}\left(\sqrt{x^2-3x-4}\right) =]-\infty,-1] \cup [4,\infty[$
$\operatorname{dom} g =]-\infty,-1] \cup [4,\infty[\setminus \{5\}$
$=]-\infty,-1] \cup [4,5[\cup]5,\infty[$

Question 2

$$
\begin{aligned}
g \circ f(x) = g(f(x)) &= \left(\sqrt{x^2+1}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 2 \\
&= \left(x^2+1\right)^2 - 2\left(x^2+1\right) + 2 \\
&= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2 + 2 \\
&= x^4 + 1 \\
(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)) &= h(x^4+1) \\
&= \frac{(x^4+1)-1}{3(x^4+1)} = \frac{x^4}{3(x^4+1)}
\end{aligned}
$$

Question 3

Puisque *dom* $f = [0,\infty[$, il n'existe aucune valeur de x plus petite que 0 dans le domaine. Ainsi, $f(x)$ n'est pas définie pour $x < 0$, d'où le fait que $\lim_{x\to 0^-} f(x) \nexists$. Pour que la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, il faut que les limites des deux côtés $\left(\lim_{x\to 0^+} f(x) \text{ et } \lim_{x\to 0^-} f(x)\right)$ existent, ce qui n'est pas le cas ici. Un exemple d'une telle fonction est $f(x) = \sqrt{x}$.

Question 4

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+4}(x-3)}{(2-x)} = \frac{\sqrt{0+4}(0-3)}{(2-0)} = \frac{\sqrt{4}(-3)}{2} = \frac{2(-3)}{2} = -3$

b) $(5x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x - 3) \div (x-1) = 5x^3 - x + 3$
$(9x^3 - 7x^2 - 3x + 1) \div (x-1) = 9x^2 + 2x - 1$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{5x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x - 3}{9x^3 - 7x^2 - 3x + 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(5x^3 - x + 3)}{(x-1)(9x^2 + 2x - 1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{5x^3 - x + 3}{9x^2 + 2x - 1} \\
&= \frac{5 - 1 + 3}{9 + 2 - 1} = \frac{7}{10}
\end{aligned}
$$

c)

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+9}{(3-x)} = \frac{18}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+9}{(3-x)} = \frac{18}{0^+} = \infty$$
$$\text{Donc, } \lim_{x\to 3} \frac{x^2+9}{(3-x)} \quad \nexists$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \left(\frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}\right)\left(\frac{2+\sqrt{x+2}}{2+\sqrt{x+2}}\right) \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{4-(x+2)}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(2+\sqrt{x+2})} = \frac{-1}{4}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -7} \frac{\frac{7}{x}-\frac{x}{7}}{x^2+4x-21} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -7} \frac{\frac{49-x^2}{7x}}{x^2+4x-21} \\
&= \lim_{x\to -7} \frac{\frac{49-x^2}{7x}}{(x-3)(x+7)} \\
&= \lim_{x\to -7} \frac{49-x^2}{7x(x-3)(x+7)} = \lim_{x\to -7} \frac{(7-x)(7+x)}{7x(x-3)(x+7)} \\
&= \lim_{x\to -7} \frac{(7-x)}{7x(x-3)} = \frac{14}{(7)(-7)(-10)} = \frac{(7)(2)}{(7)(7)(2)(5)} = \frac{1}{35} \left(= \frac{14}{490}\right)
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{8x^6+3x^2+2}}{3x^3+5x+12} &\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6(8+3/x^4+2/x^6)}}{x^3(3+5/x^2+12/x^3)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6}\sqrt{(8+3/x^4+2/x^6)}}{x^3(3+5/x^2+12/x^3)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\sqrt{(8+3/x^4+2/x^6)}}{x^3(3+5/x^2+12/x^3)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(8+3/x^4+2/x^6)}}{3+5/x^2+12/x^3} \\
&= \frac{\sqrt{8+0+0}}{3+0+0} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{8}{(x-1)(x+1)} - \frac{4}{x-1} &\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 1} \frac{8-4(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{4-4x}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-4(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-4}{(x+1)} = \frac{-4}{2} = -2
\end{aligned}$$

Question 5

a) dom $g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} (x+3) = 5$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = 5$ de la même façon.
Mais $g(2) \nexists$.
g est discontinue en $x = 2$ (discontinuité non-essentielle par trou).

b) $h(-1) = 8 - (-1) = 9$
$\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 8 - x = 9$
$\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 2x^2 + 3 = 5 \neq \lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$
h discontinue en $x = -1$ (discontinuité essentielle par saut fini).

Question 6
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{4x^3+9x^2+10x+5}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x+1)(4x^2+5x+5)}{x+1}$ en faisant la division polynomiale
$= \lim\limits_{x\to -1^-} 4x^2 + 5x + 5 = 4 - 5 + 5 = 4$
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} -x^2 - 2x + a = -(-1)^2 - 2(-1) + a = 1 + a$
$f(-1) = 1 + a$
$f(-1) = \lim\limits_{x\to -1} f(x) \iff 1 + a = 4 \iff a = 3$

Question 7
dom $g = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \dfrac{1}{2}, 2\right\}$
$\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \dfrac{-6}{(-3)(0^+)(3)} = \infty$ $\left(\text{et} \quad \lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \dfrac{-6}{(-3)(0^-)(3)} = -\infty\right)$
Asymptote verticale en $x = -1$

$\lim\limits_{x\to (\frac{1}{2})^+} g(x) = \dfrac{-15/8}{(0^+)(9/2)(3/2)} = -\infty$ $\left(\text{et} \quad \lim\limits_{x\to (\frac{1}{2})^-} g(x) = \dfrac{-15/8}{(0^-)(9/2)(3/2)} = \infty\right)$
Asymptote verticale en $x = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x^2+1)}{-(2x-1)(3x+3)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+1}{-(2x-1)(3x+3)} = \dfrac{-5}{27}$
et
$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x^2+1)}{-(2x-1)(3x+3)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+1}{-(2x-1)(3x+3)} = \dfrac{-5}{27}$.
Puisque les deux limites sont finies, il N'y a PAS d'asymptote en $x = 2$.

$$g(x) = \frac{2x^3+2x-7}{-6x^3+9x^2+9x-6}$$
$\lim\limits_{x\to \pm\infty} g(x) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^3(2+2/x^2-7/x^3)}{x^3(-6+9/x+9/x^3-6/x^3)} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2+2/x^2-7/x^3}{-6+9/x+9/x^3-6/x^3} = \dfrac{2}{-6} = \dfrac{-1}{3}$
Asymptote horizontale en $y = \dfrac{-1}{3}$

Question 8