

Formulaire sur l'intégrale

Intégrale indéfinie et dérivées

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

Changement de variables

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

$$\text{où } u = g(x), du = g'(x)dx$$

Intégration par parties

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Linéarité

$$\int Af(x) dx = A \int f(x) dx, A \in \mathbb{R}$$

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Primitives de base

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$$

$$\int \csc^2(x) dx = -\text{ctg}(x) + C$$

$$\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + C$$

$$\int \csc(x) \text{ctg}(x) dx = -\csc(x) + C$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|) + C = \ln(|\sec(x)|) + C$$

$$\int \text{ctg}(x) dx = \ln(|\sin(x)|) + C = -\ln(|\csc(x)|) + C$$

$$\int \sec(x) dx = \ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + C$$

$$\int \csc(x) dx = -\ln(|\csc(x) + \text{ctg}(x)|) + C$$

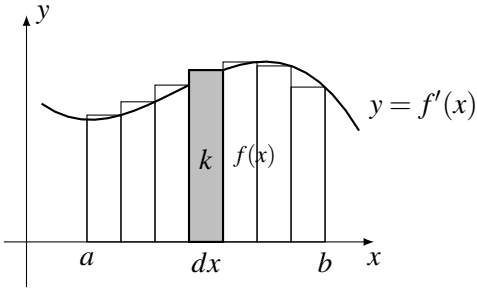
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{asin}(x) + C = -\text{acos}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{atan}(x) + C = -\text{actg}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \text{asec}(x) + C = -\text{acsc}(x) + C$$

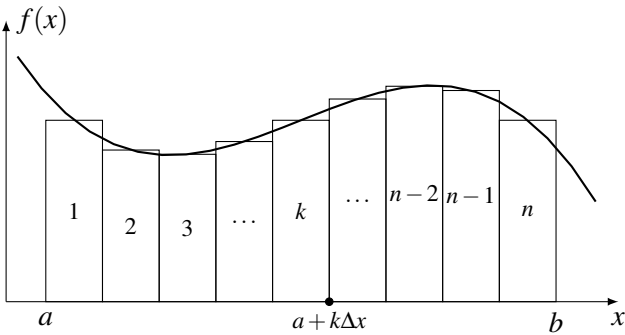
Intégrale définie

Définition



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \text{aire} \left(\boxed{k} \right)$$

$$\text{aire} \left(\boxed{k} \right) = f(x_k) \Delta x = \begin{array}{c} k \\ \vdots \\ x_k \\ \bullet \\ \Delta x \end{array} f(x_k)$$



$$x_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad \text{si on prend les cotés à droite}$$

$$x_k = a + (k-1) \frac{b-a}{n} \quad \text{si on prend les cotés à gauche}$$

$$x_k = a + (k-1/2) \frac{b-a}{n} \quad \text{si on prend les points milieu}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{pour un découpage régulier}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \text{pour un découpage irrégulier}$$

Propriétés géométriques de l'intégrale définie

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Propriétés géométriques de l'intégrale définie

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Linéarité de l'intégrale définie

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

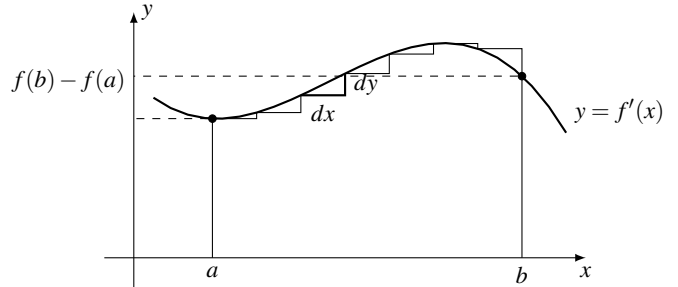
Changement de variable pour l'intégrale définie

Avec le changement de variable $u = g(x)$:

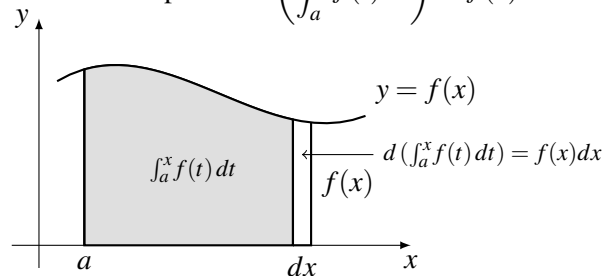
$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

Théorème fondamental du calcul

Première partie: $\int_a^b f'(x) dx = \int_a^b dy = f(b) - f(a) = f(x) \Big|_a^b$



Seconde partie: $d \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x) dx$



Comparaisons

Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a, b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$