Problèmes supplémentaires sur les logarithmes

Question 1

a) Déterminer la valeur du produit $2,34 \times 3,12$ à l'aide de l'algorithme usuel de multiplication. Combien d'opération (addition ou multiplication) faut-il effectuer pour faire cette multiplication ?

b) Sachant que $\log(2,34) \approx 0,36921$ et $\log(3,12) \approx 0,49415$ et $\log(7.3008) \approx 0,86336$, déterminer la valeur du produit $2,34 \times 3,12$. Combien d'opérations faut-il effectuer pour faire la multiplication de cette manière ?

Question 2

Transformer l'équation logarithmique en équation exponentielle et

a) $\log_2(8) = 3$

b) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

c) $\log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

d) $\log_{10}\left(\sqrt{10}\right) = \frac{1}{2}$

e) $\log_{10}(100000) = 5$

f) $\log_{10}(0,000001) = -5$

g) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = x$

h) $\log_3(81)$

i) $\log_{10}\left(10^{1000}\right)$

j) $\log_{10}(1/1000)$

Question 3

Transformer l'équation logarithmique en équation exponentielle et déterminer la valeur de x.

a) $\log_3(9) = x$

b) $\log_3(81) = x$

c) $\log_2(16) = x$

d) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = x$

e) $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = x$

f) $\log_{10}(1000) = x$

g) $\log_5\left(\sqrt[5]{5}\right) = x$

h) $\log_{10}(1000000000000) = x$

i) $\log_{10}(0,000001) = x$

j) $\log_7\left(\sqrt[3]{7}\right) = x$

k) $\log_{10}\left(10^{1000}\right) = x$

l) $\log_{10}(0,001) = x$

Question 4

Exprimer les logarithmes suivants à l'aide de logarithmes dans la base donnée et simplifier si possible.

a) $\log_2(10)$ en base 10.

b) $\log(2)$ en base 2.

c) $\log_2(1/25)$ en base 5.

d) $\log_3(\sqrt{2})$ en base 2.

Question 5

Simplifier les expressions suivantes (exprimer tout les résultats à l'aide de logarithme à base 10 si nécessaire)

a) $\log_5(18)$

b) $\log_2(10)$

c) $\log_2\left(10^{1000}\right)$

d) $\log_{10}(100000 \times 100000)$

e) $\log_{10}(100000000 \times 1000000)$

f) $\log_{10}(100000) - \log_{10}(10000)$

g) $\log_{10}\left(10^{12345} 100^{22}\right)$

h) $\log_2\left(10^4\right)$

i) $\log_{25}(5)$

j) $\log_9(27)$

k) $\log_{10}\left(\sqrt{3}\right)$

l) $2\log_2\left(\sqrt{8}\right)$

m) $5\log_5\left(\sqrt[5]{5}\right)$

n) $2\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{100}}\right)$

o) $2\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{100}}\right)+\log_{10}(100)$

p) $\log_2\left(\dfrac{2}{\sqrt{8}}\right)$

q) $\log_5\left(\dfrac{25}{125}\right)$

r) $\log_2(x)=\log_2(x)$

s) $\log_2(ax)=\log_2(ax)$

t) $\log_2(ax)=\log_2(a)+\log_2(x)$

Question 6

Résoudre les équations suivantes. Exprimer les solutions à l'aide de logarithmes en base 10 simplifiés si nécessaire.

a) $10^x=8$

b) $10^{2x}=3$

c) $\log(x)=3$

d) $\log(x)=-3$

e) $10^{-x}(10^{-x}-8)=1$

f) $\log\left(x^2\right)-4=0$

g) $\log\left(x^2+1\right)-4=0$

h) $\log_4(3x-5)=3$

i) $\log_2(x)+\log_2(x-3)=2$

j) $2\log_5(x)-\log_5(8x)=0$

k) $\log_2(3x+4)=2+\log_2(2x-2)$

l) $\log_5\left((x+3)^4\right)=4$

m) $\log_2(12-2x)-\log_2(2+x)=2$

n) $2^{10-4x}=4$

o) $\log_2(x^2-5x)=1$

p) $\log(x)=\log\left(\frac{5}{8}\right)+\log\left(\frac{7}{10}\right)+\log\left(\frac{2}{7}\right)$

q) $\log_2(x)=\log_2\left(\frac{4}{3}\right)+\log_2\left(\frac{1}{4}\right)+\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$

Question 7

Soit les propriétés suivantes des logarithmes.

(PL1) $\log_b(b^A)=A$
(PL2) $b^{\log_b(A)}=A$
(PL3) $\log_b(AB)=\log_b(A)+\log_b(B)$
(PL4) $\log_b(A^B)=B\log_b(A)$
(PL5) $\log_b(A)=\frac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$

Démontrer les propriétés suivantes des logarithmes à l'aide des cinq propriétés précédentes.

a) $\log_b(\frac{1}{A})=-\log_b(A)$

b) $\log_b\left(\frac{A}{B}\right)=\log_b(A)-\log_b(B)$

Solutions

Question 1

a) Le produit est $7,3008$ Il faut 9 multiplications et 7 additions, donc 16 opérations pour effectuer le produit.

b) Soit $P = 2,34 \times 3.12$ le produit cherché. En prenant le logarithme, on a que

$$\begin{aligned}
&\log(P)\\
&\quad = \log(2,34 \times 3.12)\\
&\quad = \log(2,34) + \log(3.12)\\
&\quad \approx 0,36921 + 0,49415\\
&\quad \approx 0,86336
\end{aligned}$$

Comme $\log(P) \approx 0,86336$ implique que $P \approx 10^{0,86336}$ et que $\log(7.3008) \approx 0,86336$ est équivalent à $7,3008 = 10^{0,86336}$, on doit avoir que $P \approx 7,3008$.

Il faut 7 additions pour faire ce calcul (et avoir une table de logarithmes sous la main !)

Question 2

a) $2^3 = 8$

b) $2^{-2} = \frac{1}{4}$

c) $5^{-1} = 1/5$

d) $10^{1/2} = \sqrt{10}$

e) $10^5 = 100000$

f) $10^{-5} = 0,000001$

g) $5^x = \frac{1}{25}$

h) 4

i) 1000

j) -3

Question 3

a) $3^x = 9$, donc $x = 2$

b) $3^x = 81$, donc $x = 4$

c) $2^x = 16$, donc $x = 4$

d) $2^x = \frac{1}{2}$, donc $x = -1$

e) $5^x = 1/25 = 1/5^2$, donc $x = -2$

f) $10^x = 1000$, donc $x = 3$

g) $5^x = \sqrt[5]{5} = 5^{1/5}$, donc $x = 1/5$

h) $10^x = 10000000000$, donc $x = 10$

i) $10^x = 0,000001$, donc $x = -5$

j) $7^x = \sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$, donc $x = 1/3$

k) $10^x = 10^1000$, donc $x = 1000$

l) $10^x = 0,001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, donc $x = -3$

Question 4

a) $\log_2(10) = \frac{\log(10)}{\log(2)} = \frac{1}{\log(2)}$

b) $\log(2) = \frac{\log_2(2)}{\log_2(10)} = \frac{1}{\log_2(10)}$

c) $\log_2(5) = \frac{\log_5(1/25)}{\log_5(2)} = \frac{-2}{\log(2)}$

d) $\log_3\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\log_2(\sqrt{2})}{\log_2(3)} = \frac{1/2}{\log_2(3)} = \frac{1}{2\log_2(3)}$

Question 5

a) $\frac{\log(18)}{\log(5)}$

b) $\frac{\log(10)}{\log(2)} = \frac{1}{\log(2)}$

c) $\frac{1000}{\log(2)}$

d) 10

e) 14

f) 1

g) 12389

h) $\frac{4}{\log(2)}$

i) $\frac{1}{2}$

j) $\frac{3}{2}$

k) $\frac{\log(3)}{2}$

l) 3

m) 1

n) -2

o) 0

p) $-1/2$

q) -1

r) $2^{\log_2(x)} = x$

s) $2^{\log_2(ax)} = ax$

t) $2^{\log_2(a)+\log_2(x)} = ax$

Question 6

a) $x = \log(8)$

b) $\log(3)/2$

c) 1000

d) $x = \frac{1}{1000}$

e) -4

f) 100

g) $3\sqrt{1111}$

h) 23

i) $x = -1,4$

j) $x = 8$

k) $x = \dfrac{12}{5}$

l) $x = 2$

m) $x = 2$

n) $x = 2$

o) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$

p) $1/8$

q) $1/2$

Question 7

a)

$$\begin{aligned}
\log_b\left(\frac{1}{A}\right) &= \log_b\left((B^{-1}\right)\\
&= -\log_b(B)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\log_b\left(\frac{A}{B}\right) &= \log_b\left(A\frac{1}{B}\right)\\
&= \log_b(A) + \log_b\left((\frac{1}{B}\right)\\
&= \log_b(A) + \log_b\left((B^{-1}\right)\\
&= \log_b(A) - \log_b(B)
\end{aligned}$$