Solutions de l'examen 4

201-NYA Calcul Différentiel

Professeur : Dimitri Zuchowski

Question 1.

a) $f'(x) = 3e^{(x^4-2x^3)}(4x^3-6x^2)\log_3(2x) + \dfrac{3e^{(x^4-2x^3)}}{x\ln 3} - \dfrac{4\cdot 2^x + 4x2^x \ln 2}{4x2^x}$

$= 3e^{(x^4-2x^3)}\left((4x^3-6x^2)\log_3(2x) + \dfrac{1}{x\ln 3}\right) - \dfrac{1}{x} - \ln 2$

b) $f'(x) = -18\sin(3x) - (4\sec^2(4x)\sin(2x) + 2\tan(4x)\cos(2x)) - 7\csc(x^4)\cot(x^4)(4x^3)$

c) $f'(x) = -4\arctan(x-1) - \dfrac{4x}{1+(x-1)^2} + 0 - \dfrac{1}{\sqrt{1-(4-x)^2}}$

d) $f'(x) = \cos\left(\log_5(\tan x)\cdot 7^{7x}\right)\left(\dfrac{7^{7x}\sec^2 x}{\tan x \ln 5} + \log_5(\tan x)\cdot 7^{7x}\cdot 7\ln 7\right)$

e) $\dfrac{4\cot^3(9x^6-e^x)(-\csc^2(9x^6-e^x))(54x^5-e^x) + \frac{5}{x}}{7\sqrt[7]{(\cot^4(9x^6-e^x)+\ \ln(x^5))^6}}$

f) $\dfrac{2\sec^2(x^3)\tan(x^3)(3x^2)\ln(3^x)\arcsin(8x) - \sec^2(x^3)\left(\ln(3)\arcsin(8x) + \frac{8x\ln 3}{\sqrt{1-(8x)^2}}\right)}{\left(\ln(3^x)\arcsin(8x)\right)^2}$

g) $5^{\left(3^{x\csc(\sqrt{x})}\right)}\ln 5\left(3^{x\csc(\sqrt{x})}\right)\ln 3\left(\csc(\sqrt{x}) - \dfrac{x\csc(\sqrt{x})\cot(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right) + 0$

Question 2.

Aire= $A = 2xy = 2xe^{\frac{-x^2}{2}}$,

d'où $A'(x) = 2e^{\frac{-x^2}{2}} - 2x^2e^{\frac{-x^2}{2}} = 2e^{\frac{-x^2}{2}}(1-x^2)$

Donc les points critiques sont $x = \pm 1$

$A''(x) = -2xe^{\frac{-x^2}{2}} - 4xe^{\frac{-x^2}{2}} + 2x^3e^{\frac{-x^2}{2}} = -2xe^{\frac{-x^2}{2}}(3-x^2)$

et $A''(1) = \dfrac{-4}{\sqrt{e}}$ = négatif. Donc c'est un maximum. L'aire est donc de $A = 2(1)e^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$

Question 3.

La longueur est $l = r + h = \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{5}{\cos\theta} = \csc\theta + \sec\theta$

donc $l'(\theta) = -\csc\theta\cot\theta + \sec\theta\tan\theta = -\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{5\sin\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{-\cos^3\theta + 5\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$.

Le point critique est donc $\tan\theta = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ et donc quand $\theta = \arctan\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)$

Or
$l''(\theta) = -(-\csc\theta\cot^2\theta - \csc^3\theta) + 5(\sec\theta\tan^2\theta + \sec^3\theta) = \csc\theta(\cot^2\theta + \csc^2\theta) + 5\sec\theta(\tan^2\theta + \sec^2\theta)$
Mais puisque $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, en pensant un peu au cercle trigonométrique on voit bien que $\sin\theta$ et $\cos\theta$ sont positifs pour tout ces angles (et donc aussi pour $\theta = \arctan\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)$) ! Et par conséquent $\tan\theta,\ \cot\theta,\ \sec\theta$ et $\csc\theta$ le sont aussi car ils sont des quotients des deux autres. On peut donc conclure que $l''(\arctan\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right))$ est positif et par conséquent qu'on a bien un minimum.