

**Examen 4**  
NYB Calcul intégral  
17 may 2007  
Professeur : Dimitri Zuchowski

---

Consignes

Toute forme de documentation et la calculatrice graphique sont interdites. Toute forme de plagiat et de communication est interdite et entraîne la note ZÉRO.

---

**Question 1. (10%)** Calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n$  des suites suivantes et déterminer si elles convergent ou divergent.

a)  $\left\{ \frac{n-1}{n!} \right\}$

b)  $\left\{ \frac{\sin n}{n} \right\}$

**Question 2. (10%)** Déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, dire vers quoi elles convergent.

a)  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{(-2)^n}$

b)  $\sum_{n=1000}^{\infty} \frac{-1}{4n}$

**Question 3. (48%)** Déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2n+3}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3+n^2)}{n^3}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^5+1}{(n^2+1)^3}$

g)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+5}}$

d)  $\sum_{n=5}^{\infty} \left( \frac{3n}{1+n^2} \right)^n$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^{\frac{7}{8}}}$

**Question 4. (12%)** Trouver l'intervalle de convergence des séries de puissances suivantes.

$$\text{a) } \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^k \qquad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x+4)^k}{k!}$$

**Question 5. (15%)** Trouver le développement en série de Taylor des fonctions suivantes autour de la valeur de  $a$  donnée.

$$\text{a) } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), a=0 \qquad \text{b) } \cos x, a=\pi \qquad \text{c) } \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}, a=0$$

**Question 6. (5%)** Utiliser les séries de Taylor pour trouver

$$\int \cos(4x^3) dx.$$

Merci pour la belle session et profitez bien de l'été!  
Dimitri