Examen 2 (solutions)
201-NYC Algèbre linéaire
22 octobre 2008
Professeur : Dimitri Zuchowski

Question 1. (10%)

a) $(x, y, z) = (2, 4, -2) + k(-6, -5, 4)$

b) $(2, 4, -2) + k(-7, -5, 2) + r(-4, 3, 1)$

Question 2. (10%)

$$\theta = 90^\circ - \arccos\left(\frac{10}{\sqrt{6}\sqrt{35}}\right)$$

Question 3. (10%)

$$\text{dist}(A, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{8}} = \frac{\|(0, 0, -2)\|}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Question 4. (10%)

$$\vec{n} = \vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -\frac{5}{2} & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2}, 8, 5\right).$$ Et on a que $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - \left(-7, \frac{3}{2}, 1\right) = \left(7, -\frac{1}{2}, -1\right)$

D'où, $\text{dist}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \|\overrightarrow{AB}_{\vec{n}}\| = \dfrac{\frac{35}{2} - 4 - 5}{\sqrt{\frac{25}{4} + 64 + 25}} = \dfrac{17}{2\sqrt{\frac{25+256+100}{4}}} = \dfrac{17}{\sqrt{381}}$

Question 5. (10%)

Le plan $\mathcal{P}_1$ peut ce réécrire comme $x - y - z = -4$, on peut donc trouver la droite d'intersection des deux plans

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(L_2 \to L_2 - 4L_1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{(L_2 \to \frac{L_2}{3})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(L_1 \to L_1 + L_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

Donc $(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{17}{3}, 0\right) + t\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 1\right)$ est l'équation de cette droite. Puisque le plan $\mathcal{P}$ contient cette droite, il contient en particulier le point $\left(\frac{5}{3}, \frac{17}{3}, 0\right) = B$. De plus les vecteurs $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 1\right)$ et $\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs directeurs de ce plan.

$$\mathcal{P}: \quad (x,y,z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{17}{3}, 0\right) + k\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 1\right) + r\left(-\frac{4}{3}, \frac{20}{3}, 0\right)$$

Question 6. (10%)

Le point le plus près de l'origine est le point $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}_{\vec{n}}$. Or $\overrightarrow{OA} = (2,3,-1)$. Pour trouver $\vec{n}$, on commence par $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (0,-3,-9)$ et finalement, $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & -9 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-30,-9,3)$.

D'où on tire que $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \dfrac{-60-27-3}{900+81+9}(-30,-9,3) = \dfrac{-90}{990}(-30,-9,3) = \left(\dfrac{30}{11}, \dfrac{9}{11}, -\dfrac{3}{11}\right)$

Question 7. (10%)

La position de P est donnée par

$$\overrightarrow{OP} = (4,-7,12) + t\frac{2}{\sqrt{576+529+49}}(-24,-23,-7) = (4,-7,12) + t\frac{2}{\sqrt{1154}}(-24,-23,-7)$$

et la position de Q est

$$\overrightarrow{OQ} = (-20,-30,5) - t\frac{4}{\sqrt{1154}}(-24,-23,-7)$$

La collision aura lieu lorsque $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ et en regardant la composante en x de cette égalité, on a

$$4 - \frac{48t}{\sqrt{1154}} = -20 + \frac{96t}{\sqrt{1154}}$$

$$\left(\frac{96+48}{\sqrt{1154}}\right)t = 24 \Longrightarrow t = \frac{24\sqrt{1154}}{144} = \frac{\sqrt{1154}}{6}$$

Question 8. (30%)

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(L_1 \to -L_1)]{(L_1 \leftrightarrow L_2)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(L_2 \to L_2 - 4L_1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 10 & -17 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(L_2 \to \frac{L_2}{10})} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{10} & \frac{15}{10} \end{pmatrix} \xrightarrow{(L_1 \to L_1 + 3L_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{25}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{10} & \frac{15}{10} \end{pmatrix}$$

En posant $z = t$ on obtient : $(x,y,z) = \left(\dfrac{25}{10}, \dfrac{15}{10}, 0\right) + t\left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{17}{10}, 1\right)$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \\ -1 & -7 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(L_3 \to L_3 + L_1)]{(L_2 \to L_2 - 2L_1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & -8 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(L_3 \to L_3 + 2L_2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\left(L_3 \to -\frac{L_3}{8}\right)]{\left(L_2 \to \frac{L_2}{4}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow[\left(L_2 \to L_2 + \frac{7L_3}{4}\right)]{(L_1 \to L_1 - 3L_3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{33}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{32} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow{(L_1 \to L_1 + L_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{111}{32} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{32} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

Donc la solution est $(x, y, z) = \left(\frac{111}{32}, -\frac{21}{32}, -\frac{11}{8}\right)$

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 8 & 8 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[(L_3 \to L_3 - L_2)]{(L_1 \to L_1 - L_2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 9 & 11 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(L_2 \to L_2 - 2L_1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & 9 & 11 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(L_2 \to L_2 + L_3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 9 & 11 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(L_2 \to \frac{L_2}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 9 & 11 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 9L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 11 & \frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{11}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 4L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{59}{22} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{22} \end{pmatrix}$$

Donc la solution est $(x, y, z) = \left(\frac{59}{22}, -\frac{5}{2}, \frac{21}{22}\right)$