Examen 2 (Solutions)
201-NYA Calcul Différentiel
Professeur : Dimitri Zuchowski

Question 1.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4(x+h)^2}{(x+h)+5}-\frac{4x^2}{x+5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+5)4(x+h)^2-(x+h+5)4x^2}{h(x+5)(x+h+5)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+5)(4x^2+8xh+4h^2)-(4x^3+4hx^2+20x^2)}{h(x+5)(x+h+5)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(4x^3+8x^2h+4xh^2+20x^2+40xh+20h^2)-(4x^3+4hx^2+20x^2)}{h(x+5)(x+h+5)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4x^2h+4xh^2+40xh+20h^2}{h(x+5)(x+h+5)}=\lim_{h\to 0}\frac{4x^2+4xh+40x+20h}{(x+5)(x+h+5)}=\frac{4x^2+40x}{(x+5)^2}$$

Donc $f'(3)=\dfrac{4(3)^2+40(3)}{((3)+5)^2}=\dfrac{36+120}{64}=\dfrac{156}{64}=\dfrac{39}{16}$

Question 2.

a) $f'(x)=15x^4-3\sqrt{7}x^2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x^{\frac{1}{2}}-1$

b) $g'(x)=9(2x+3)^8(2)(4x^2+7)^{12}+(2x+3)^9(12)(4x^2+7)^{11}(8x)$

$=(2x+3)^8(4x^2+7)^{11}(18(4x^2+7)+(96x)(2x+3))=(2x+3)^8(4x^2+7)^{11}(264x^2+288x+126)$

c) $h'(x)=\dfrac{(10x)(9x+4)-9(5x^2+7)}{(9x+4)^2}=\dfrac{45x^2+40x-63}{(9x+4)^2}$

d) $f'(t)=\dfrac{6\left(t^4-5t^3\right)^{\frac{1}{5}}(4t^3-15t^2)}{5}$

e) $g'(t)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4-t}{(t+7)(t^3-t+2)^7}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\dfrac{-((t+7)(t^3-t+2)^7)-(4-t)((t+7)(t^3-t+2)^7)'}{((t+7)(t^3-t+2)^7)^2}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{(t+7)(t^3-t+2)^7}{4-t}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{-((t+7)(t^3-t+2)^7)-(4-t)((t^3-t+2)^7+7(t+7)(t^3-t+2)^6(3t^2-1))}{((t+7)^2(t^3-t+2)^{14}}\right)$$

$$= \left(\frac{(t+7)^{\frac{2}{3}}(t^3-t+2)^{\frac{14}{3}}}{3(4-t)^{\frac{2}{3}}} \right) \left(\frac{(t^3-t+2)^6\left[(-t-7)(t^3-t+2)-(4-t)(t^3-t+2)-7(4-t)(t+7)(3t^2-1)\right]}{((t+7)^2(t^3-t+2)^{14}} \right)$$

$$= \left(\frac{(t^3-t+2)^6\left[(t^3-t+2)(-t-7-4+t)-7(-t^2+3t+28)(3t^2-1)\right]}{3(4-t)^{\frac{2}{3}}((t+7)^{\frac{4}{3}}(t^3-t+2)^{\frac{28}{3}}} \right)$$

$$= \left(\frac{(t^3-t+2)^6\left[(-11t^3+11t-22)+21t^4-63t^3-588t^2-7t^2+21t+196\right]}{3(4-t)^{\frac{2}{3}}((t+7)^{\frac{4}{3}}(t^3-t+2)^{\frac{28}{3}}} \right)$$

$$= \left(\frac{(t^3-t+2)^6\left[21t^4-74t^3-595t^2+32t+174\right]}{3(4-t)^{\frac{2}{3}}((t+7)^{\frac{4}{3}}(t^3-t+2)^{\frac{28}{3}}} \right)$$

Question 3.

$$(4xy-3x)' = \left(\frac{x-y^2}{y+6}\right)' \Longrightarrow 4(y+xy')-3 = \frac{(1-2yy')(y+6)-(x-y^2)(y')}{(y+6)^2}$$

$$\Longrightarrow 4y(y+6)^2-3(y+6)^2+x(y+6)^2y' = (y+6)-2y(y+6)y'-xy'+y^2y'$$

$$\Longrightarrow 2y(y+6)y'+xy'-y^2y'+x(y+6)^2y' = (y+6)-4y(y+6)^2+3(y+6)^2$$

$$\Longrightarrow y'(2y(y+6)+x-y^2+x(y+6)^2) = (y+6)-4y(y+6)^2+3(y+6)^2$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{(y+6)-4y(y+6)^2+3(y+6)^2}{2y(y+6)+x-y^2+x(y+6)^2}$$

Question 4.

$$\frac{d^3}{dx^3}(5x^3+2x-5)^4 = \frac{d^2}{dx^2}(4(5x^3+2x-5)^3(15x^2+2)) = \frac{d}{dx}(12(5x^3+2x-5)^2(15x^2+2)^2+4(5x^3+2x-5)^3(30x))$$

$$= 24(5x^3+2x-5)(15x^2+2)^3+24(5x^3+2x-5)^2(15x^2+2)(30x)$$

$$+12(5x^3+2x-5)^2(15x^2+2)(30x)+120(5x^3+2x-5)^3$$

Question 5.

Pour qu'elles soient parallèles, il faut qu'elles aient la même pente. D'où $f'(x) = 15x^2-6x-6$ doit être $= -6$. Reste donc à solutionner $15x^2-6x = 3x(5x-2) = 0$. D'où $x=0$ ou $x = \frac{2}{5}$

Question 6.

On a que la vitesse du pied est $\dfrac{dx}{dt} = 2m/s$ et par pythagore que $x^2 + y^2 = 5^2$. En dérivant de chaque coté de cette dernière équation par rapport au temps on obtient :

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(4) \implies \frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2) = 0.$$

Et en utilisant la règle de Leibnitz, on obtient :

$$\frac{d(x^2)}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d(y^2)}{dy}\frac{dy}{dt} = 0 \implies 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0.$$

Donc, lorsque le pied de l'échelle est à $4m$ du mur on a

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x\frac{dx}{dt}}{2y} = -\frac{2(4m)(2m/s)}{2\sqrt{25-(4m)^2}} = -\frac{8m^2/s}{3m} = \left(-\frac{8}{3}\right)m/s.$$