

Examen 1 (solutions)
 201-NYA Calcul Différentiel
 25 octobre 2007
 Professeur : Dimitri Zuchowski

Question 1. a) On doit trouver les zéros du polynôme $3x^2 - 4x + 7$ qu'on obtient avec

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(7)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{-68}}{6}.$$

Or la racine d'un nombre négatif n'existe pas et on peut conclure qu'il n'y a pas de zéro. D'où $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) On commence par trouver les zéros de $x^2 - 3x + 1$ qui sont

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Puisque cette parabole est concave vers le haut, elle sera donc négative entre ses deux zéros. De plus on doit soustraire 3 du domaine pour éviter une division par zéro. D'où,

$$\text{dom}(f) = -\infty, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Big] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 3[\cup]3, \infty$$

Question 2.

$$\begin{aligned} (f \circ g \circ h \circ f)(x) &= f(g(h(f(x)))) = f(g(h(\sqrt{4x^3 - x}))) = f(g(\sqrt{4x^3 - x} + 3)) \\ &= f(2(\sqrt{4x^3 - x} + 3)^2 + 7) = \sqrt{4(2(\sqrt{4x^3 - x} + 3)^2 + 7)^3 - 2(\sqrt{4x^3 - x} + 3)^2 + 7} \end{aligned}$$

Question 3. (10%)

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} 2x^3 - 8\sqrt{x} &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 8 \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^3 - 8 \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} x} = 2(2)^3 - 8\sqrt{2} = 8(2 - \sqrt{2}) \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(x-4)}{(5-x)^2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x+3)(x-4)}{\lim_{x \rightarrow -1} (5-x)^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x+3) \lim_{x \rightarrow -1} (x-4)}{\left(\lim_{x \rightarrow -1} (5-x) \right)^2} \\ &= \frac{\left(\lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 3 \right) \left(\lim_{x \rightarrow -1} x - \lim_{x \rightarrow -1} 4 \right)}{\left(\left(\lim_{x \rightarrow -1} 5 - \lim_{x \rightarrow -1} x \right) \right)^2} = \frac{(-1+3)(-1-4)}{(5-(-1))^2} = -\frac{10}{36} \end{aligned}$$

Question 4. (25%)

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\frac{5}{x} - \frac{2x}{10}}{x^2 + 2x - 15} &= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\frac{50-2x^2}{10x}}{(x-3)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{25-x^2}{5x(x-3)(x+5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{-(x-5)(x+5)}{5x(x-3)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{-(x-5)}{5x(x-3)} = \frac{10}{(-25)(-8)} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^6 + 3x^5 + 2x - 6}{4x^3 - 14x^2 + 13x - 21} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-x^5 + 2)(x-3)}{(4x^2 - 2x + 7)(x-3)} = \frac{-3^5 + 2}{4(9) - 6 + 7} = -\frac{241}{37}$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{x+2})(2 + \sqrt{x+2})}{(x-2)(2 + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (x+2)}{(x-2)(2 + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(2 + \sqrt{x+2})} = -\frac{1}{4}$$

d)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x-2} = \nexists \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 4}{x-2} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 4}{x-2} = \infty$$

e)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 3x^2 + 9}{2x^3 - 7x^2 + 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5(4 + 3x^{-3} + 9x^{-5})}{x^3(2 - 7x^{-1} + 8x^{-3})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{2} = \infty$$

Question 5. (15%)

a) Non car $f(-1) = \nexists$

b) Oui en $x = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x^2 + 1 = 4$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x^3 - 10x^2 - x + 2}{x-2} = 4$
 et $f(1) = 4$.
 Non pour $x = 2$ car $f(2) = \nexists$.

Question 6. (10%)

a) Non pour $[0, 1]$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1)$.

b) Oui pour $-\infty, 1[$ car le problème en $x = 1$ est exclus.

c) Non pour $]1, 3[$ car pas continue en $x = 2$.

d) Oui pour $]1, 2[$ car c'est la fonction $f(x) = x^2$.

e) Oui pour $]1, 2]$ car c'est la fonction $f(x) = x^2$ aussi.

Question 7. (10%)

a) Asymptote verticale en $x = 3$ car $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4}{x-3} = -\infty$ et asymptote horizontale en $y = 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x-3} = 0$$

b) Asymptote verticale en $x = -1, \frac{1}{3}, 4$ car $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^3 + 2x - 5}{(2x+2)(3x-1)(4-x)} =$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{3x^3 + 2x - 5}{(2x+2)(3x-1)(4-x)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x^3 + 2x - 5}{(2x+2)(3x-1)(4-x)} = \infty$$

et une asymptote horizontale en $y = -\frac{1}{2}$ car

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 + 2x - 5}{(2x+2)(3x-1)(4-x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3(3 + 2x^{-2} - 5x^{-3})}{x(2 + 2x^{-1})x(3 - 1x^{-1})x(4x^{-1} - 1)} = -\frac{1}{2}$$

Question 8. (10%)