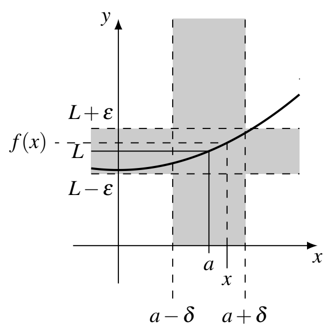
Formulaire sur les propriétés des limites

Définition

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff$ $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut x est assez près de a, $x \neq a$, $x \in \mathrm{dom}(f)$.



$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0 \colon 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

Limites à droite et à gauche

Les limites à droite et à gauche sont définies comme les limites, mais en ajoutant la condition $x > a$ si $x \to a^+$ (à droite) et $x < a$ si $x \to a^-$ (à gauche).

Lien entre limites et limites à droites et à gauches

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.
- Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} = L$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Égalités de limites

Si $F(x) = G(x)$ pour tout $x \neq a$ sur un intervalle ouvert $]b, c[$ contenant a, alors

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} G(x),$$

si la limite du membre de droite existe.

Cette propriété est aussi valable pour les limites à gauche et à droite.

Comparaison de limites

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans un intervalle ouvert contenant a on a que alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

(Sandwich ou gendarmes) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x dans un intervalle contenant a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \to \lim_{x\to a} g(x) = L.$$

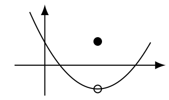
Continuité

Une fonction f est continue en $x = a$ ssi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

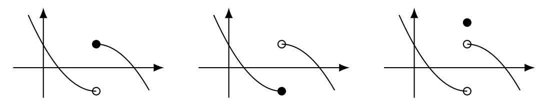
Pour que f soit continue en a, il faut que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et que $f(a)$ soit défini.

Types de discontinuité

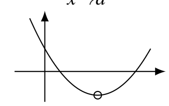
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ mais la limite existe et $f(a)$ est définie.



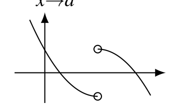
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas mais $f(a)$ est défini.



- $f(a)$ n'est pas définie mais $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.



- $f(a)$ n'est pas définie et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.



Propriétés des limites

- $\lim\limits_{x\to a} C f(x) = C \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $C \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) g(x)\big) = \Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)\Big(\lim\limits_{x\to a} g(x)\Big)$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Dans chaque cas, on suppose que les limites du membre de droite existent et qu'il n'y a pas de division par zéro.

Hypothèses de continuité

On suppose que les fonctions suivantes sont continues partout où elles sont définies.

- Les fonctions polynômiales
- Les fonctions rationnelles (rapport de fonctions polynômiales)
- Les fonctions algébriques (on ajoute les puissances rationnelles)
- Les fonctions transcendantes (exponentielles, logarithmiques, trigonométriques, puissances quelconques)

Pour chaque fonction continue énumérée, si $f(a)$ est défini, on peut donc évaluer les limites en utilisant la continuité :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Limites de fonctions composées

En général, $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big) = \lim\limits_{x\to b} f(x)$ si $b = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe.

Une fonction f est continue en $b = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ ssi

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big)$$

quand la limite du membre de droite existe.

Limites impliquant ∞, 0^+ et 0^-

Propriétés générales

Si $k > 0$

$$\infty + \infty = \infty$$
$$\infty \cdot \infty = \infty$$
$$\infty \pm k = \infty$$
$$\pm k \cdot \infty = \pm\infty$$
$$\infty^\infty = \infty$$
$$\infty^k = \infty$$

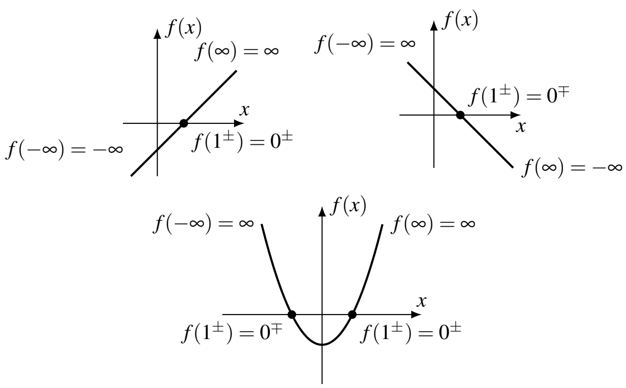
$$(-\infty)^k = \begin{cases} \infty & \text{si } k \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\infty} = \infty$$

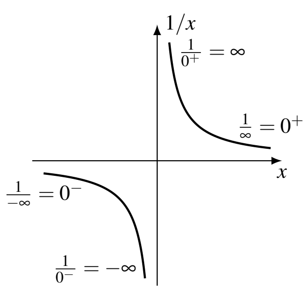
$$\sqrt[n]{-\infty} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ impair} \\ \nexists & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Certaines limites à l'infini n'existent pas : $\lim_{x\to\infty} \sin(x) \nexists$, $\lim_{x\to\infty} \cos(x) \nexists$, $\lim_{x\to\infty} \tan(x) \nexists$.

0^+ ou 0^- ?



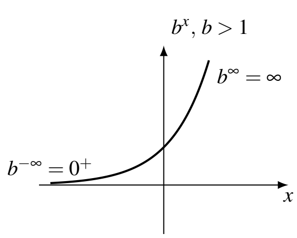
Division par zéro et par ∞

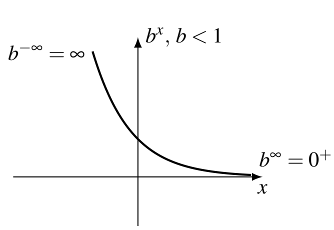


$\frac{0}{0}$: indéterminé

$\frac{\infty}{\infty}$: indéterminé

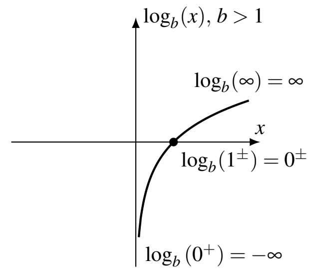
Exponentielles

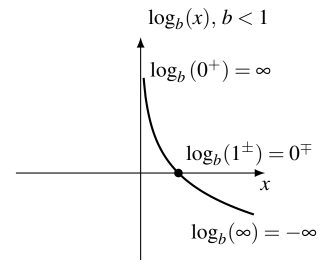




$$b^\infty = \begin{cases} \infty \text{ si } b > 1 \\ \text{Indéterminé si } b = 1 \\ 0 \text{ si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Logarithmes





Formes indéterminées

Une forme indéterminée est une limite ne pouvant être évaluée par les propriétés précédentes sans modifier la fonction donnée. Les deux résultats importants pour évaluer de telles limites, quand elles existent, sont les suivant.

Remplacer la fonction On peut remplacer la fonction dont la limite mène à une forme indéterminée par une autre fonction qui aura la même limite si elle existe (par la prop. d'égalité des limites). On le fait habituellement en simplifiant des facteurs $(x-a)$ pour transformer $F(x)$ en $G(x)$.

Règle de l'Hospital Si f et g sont deux fonctions dérivables en $x = a$ dont la dérivée est continue en $x = a$, et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (inf. « $0/0$ ») (et si une autre condition technique est satisfaite), alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si la limite du membre de droite existe.

Formes indéterminées, synthèse des trucs

Forme	Résultats possibles	Trucs
$\frac{0}{0}$	0 , k , $\pm\infty$	Simplification d'un facteur $(x-a)$ commun au numérateur et au dénominateur ; ce facteur peut s'obtenir de différentes manières , factorisation, conjugué, dénominateur commun. On peut aussi utiliser la règle de l'Hospital
$\frac{\infty}{\infty}$	0 , k , $\pm\infty$	Mise en évidence de la plus grande puissance, inversion du numérateur et du dénominateur et règle de l'Hospital
$\infty - \infty$	$-\infty$, k , ∞	Mise en évidence, dénominateur commun, conjugué, règle de l'Hospital
$0 \cdot \infty$	0 , k , $\pm\infty$	réécriture sous forme de rapport, règle de l'Hospital
0^0	0 , k , 1	logarithme, règle de l'Hospital
1^∞	1 , k , ∞	logarithme, règle de l'Hospital
∞^0	∞ , k , 1	logarithme, règle de l'Hospital

Dans certaines situations, le seul moyen d'établir la limite d'une fonction donnée est en la comparant à d'autres fonctions dont les limites sont connues.