Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de St-Laurent
201-NYA — Calcul différentiel — Automne 2013

Ancien examen 4

Question 1

Dériver les fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{e^{-x^3}}{\cos(x^2)\ln(2)}$

b) $f(x) = \ln(\log_\pi(x))\, e^{\pi^x}$

c) $f(x) = \sin(\sin(\pi^x)) - 3\sec\left(e^{x/\pi}\right) + \arccos(e^\pi)$

d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arccosec}(\sin(x))}{\cos(x^2)}$

e) $f(x) = \operatorname{cosec}^5\left(\dfrac{x^2}{2}\right) + \sqrt{\dfrac{\operatorname{cotan}(2x)}{2}}$

Question 2

Faire le tableau de variation de la fonction

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

le domaine, les valeurs critiques, les minimums, les maximums, les points d'inflexion et esquisser la fonction sachant qu'il n'y a pas d'asymptotes !

Question 3

Déterminer la pente de la tangente en $x = -\frac{\pi}{2}$ du graphe de la fonction

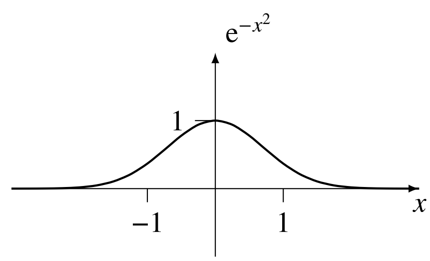
$$f(x) = \sec\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Question 4

Sachant que la dérive de $\tan(x)$ est $\sec^2(x)$, utiliser l'identité $\tan^2(x)+1 = \sec^2(x)$ pour déterminer la dérivée de $\sec(x)$.

Question 5

Voici le graphe de l'équation $y = e^{-x^2}$:



Déterminer l'aire du rectangle inscrit entre la courbe et l'axe des x et symétrique par rapport à l'axe des y (dont la base va de $-x$ à x) qui a la plus grande surface.

Solutions

Question 1

a) $\dfrac{-3\ln(2)x^2\mathrm{e}^{-x^3}\cos(x^2)+2\ln(2)x\mathrm{e}^{-x^3}\sin(x^2)}{\cos^2(x^2)\ln(2)^2}$

b) $f'(x)=\frac{1}{\log_\pi(x)}\frac{1}{x\ln(\pi)}\mathrm{e}^{\pi^x}+\ln\left(\log_\pi(x)\right)\mathrm{e}^{\pi^x}\pi^x\ln(\pi)$

c) $f'(x)=\cos(\sin(\pi^x))\cos(\pi^x)\pi^x\ln(\pi)-\frac{3}{\pi}\sec\left(\mathrm{e}^{x/\pi}\right)\tan\left(\mathrm{e}^{x/\pi}\right)\mathrm{e}^{x/\pi}$

d) $f'(x)=\dfrac{\frac{-\cos(x)\cos(x^2)}{\sin(x)\sqrt{\sin^2(x)-1}}+2x\,\mathrm{arccosec}(\sin(x))\sin(x^2)}{\cos^2(x^2)}$

e) $f'(x)=-5x\,\mathrm{cosec}^5\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\mathrm{cotan}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\mathrm{cosec}^2(2x)}{\sqrt{\mathrm{cotan}(2\mathrm{x})}}$

Question 2

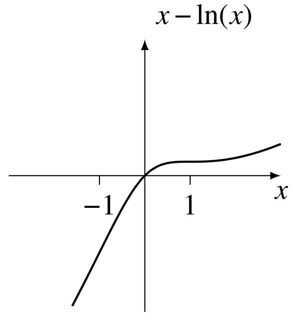
Le domaine de f est $\mathbb{R}$: f est définie quand $\ln(x^2+1)$ est défini, ce qui est toujours le cas car $x^2+1>0$ pour tout x.

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\qquad f''(x)=\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

La seule valeur critique de f' est $x=1$, où $f'(x)=0$.
Les valeurs critiques de $f''(x)$ sont $x=1$ et $x=-1$.

x		-1		1	
$f'(x)$	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	INF	$\nearrow$	INF	$\nearrow$

$x-\ln(x)$



Question 3

La dérivée de la fonction est

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sec\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)\sec\left(\frac{x}{2}\right).$$

En $x=-\pi/2$, on obtient

$$\begin{aligned}f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{1}{2}\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\\&=\frac{3+2\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(Rappel : pour évaluer $\sec(x)$, évaluer $\frac{1}{\cos(x)}$)

Question 4

Dériver l'identité $\tan^2(x)+1=\sec^2(x)$:

$$2\tan(x)\sec^2(x)=2\sec(x)\left(\sec(x)\right)'.$$

En isolant $\left(\sec(x)\right)'$, on obtient

$$\left(\sec(x)\right)'=\frac{2\tan(x)\sec^2(x)}{2\sec(x)}=\sec(x)\tan(x).$$

Autre possibilité :

$$\begin{aligned}\tan^2(x)+1&=\sec^2(x)\\\sec(x)&=\sqrt{\tan^2(x)+1}\\(\sec(x))'&=\left(\sqrt{\tan^2(x)+1}\right)'\\&=\frac{1}{2\sqrt{\tan^2(x)+1}}\left(2\tan(x)\sec^2(x)\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{\tan^2(x)+1}}\left(\tan(x)\sec^2(x)\right)\\&=\frac{1}{\sec(x)}\left(\tan(x)\sec^2(x)\right)\\&=\sec(x)\tan(x)\end{aligned}$$

Question 5

$A=2x\mathrm{e}^{-x^2}$.
$A'=2\mathrm{e}^{-x^2}-4x^2\mathrm{e}^{-x^2}=2\mathrm{e}^{-x^2}(1-2x^2)$.
$A'=0$ si $(1-2x^2)=0$ ssi $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
$A''=2\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)+\mathrm{e}^{-x^2}(-4x)=-8x\mathrm{e}^{-x^2}$.
En $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $A''=-\frac{8}{\sqrt{2}}(+)<0$ et en $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $A''=\frac{8}{\sqrt{2}}(+)>0$. On a donc un maximum quand $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'aire maximum est donc $2\frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{2}}$.