Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep St-Laurent
Calcul intégral — 201-NYB — Hiver 2015

Ancien examen 3

Question 1 (16 points)

Partie 1 : Déterminer la valeur des constantes $A, B, C, \cdots$ telles que

$$\frac{4x^3+6x^2+x+2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Partie 2 : donner la forme de la décomposition en fractions partielles sans déterminer les valeurs des constantes.

a) $\dfrac{1}{x^2+2x+1}$

b) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2(x^2-x+3)^2}$

c) $\dfrac{x-1}{x^4-x^3-x+1}$

(indice : $1^4-1^3-1+1=0$)

Question 2 (70 points)

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+3}{(x-2)(x^2+1)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+10}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{\pi/117}^{\infty} \cos(x)\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$

Question 3 (5 points)

Sans faire aucun calcul, décrivez les étapes possibles du calcul de l'intégrale

$$\int \frac{x^3+x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+2x+3)}\,dx$$

en supposant que les résultats sont les pires possibles pour compliquer le calcul. Donner les techniques d'intégrations et les manipulations algébriques importantes qui seraient à utiliser.

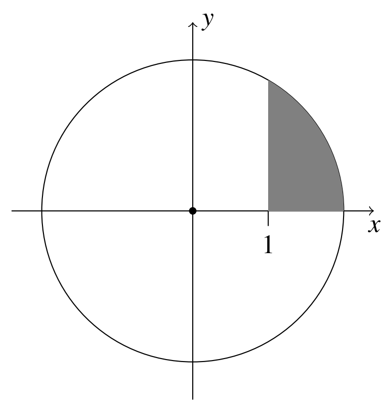
Question 4 (40 points)

Calculer les volumes suivants.

a) Volume engendré par rotation autour de l'axe des y de la région entre la courbe d'équation $y=-(x-2)(x-1)$ et l'axe des x.

b) Volume engendré par rotation autour de la droite $y=1$ de la région entre la courbe d'équation $y=x^2$ et les droites $x=0$ et $y=1$.

c) Volume par rotation autour de l'axe des x de la région délimitée par $x \geq 1$ et $y \geq 0$ et le cercle de rayon 2 centré en $(0,0)$.



Solutions

Question 1
Les valeurs sont $A = 1, B = 2, C = 3$ et $D = 4$.

a) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$

b) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+3} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+3)^2}$

c) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$

Question 2

a) Substitution trigonométrique avec $x = \frac{3}{2}\sec(\theta)$.
$\frac{\left(\sqrt{4x^2-9}\right)^3}{48} + \frac{9\sqrt{4x^2-9}}{16} + C$

b) décomposition en fractions partielles.
$\ln(|x-2|) - \operatorname{atan}(x) + C$

c) Compléter le carré au dénominateur donne $(x-1)^2+9$ et utiliser la substitution trigonométrique $\tan(\theta) = \frac{x-1}{3}$.
$\frac{1}{3}\operatorname{atan}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$

d) Intégrale impropre, A.V. en $x = 2$. $\lim_{b\to 2^-} \int_0^b \frac{1}{x-2}\,dx = -\infty$

e) Intégrale impropre divergente car $\lim_{x\to\infty} \sin(x) \nexists$.

f) Intégrale impropre, A.V. en $\pi/2$. ∞

g) -1 (voir exemple fait en classe : il faut trouver une primitive avec l'intégration par partie et il faut utiliser la règle de l'Hospital pour évaluer la limite).

Question 3
Division polynomiale et décomposition en fraction partielle. Comme on a un facteur premier d'ordre deux, on aura une intégrale de la forme

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2x+3}\,dx$$

que l'on doit faire à l'aide d'une substitution trigonométrique après avoir complété le carré en bas. Le résultat sera une intégrale contenant du sin et du cos ou du sec et du tan, que l'on pourra calculer à l'aide des techniques d'intégration pour les fonctions trigonométriques, peut-être à l'aide d'identités trigonométriques.

Question 4

a) Tubes $V = \int_1^2 2\pi x(-x^2+3x-2)\,dx = \frac{\pi}{2}$

b) Tubes $V = \int_0^1 \pi(1-x^2)^2\,dx = \frac{8\pi}{15}$

c) Disques $\int_1^2 \pi\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\,dx = \frac{5\pi}{3}$