Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
201-NYA — Calcul différentiel — Automne 2013

Préexamen 2

Question 1

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. Simplifier les résultats.

a) $f(x) = \dfrac{100}{x^{100}} - \pi^2 x^2 + \sqrt[100]{\dfrac{1}{x^3}} + \dfrac{\pi^{100}}{x^{100}}$

b) $f(x) = (1+2x)^2 \sqrt[3]{1-x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{(3x-2)^2}{(x-1)\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \left(2x^2-3\right)^2 (x+1)^3$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}}$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^7$

Question 2

a) Déterminer pour quelle valeur de x la tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x - 1$ est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{26x}{27} + 31$.
b) Donner un exemple graphique qui montre qu'il est possible d'avoir plus d'une solution à ce problème, c'est-à-dire plus d'une droite tangente de même pente.

Question 3

Soit C l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3$$

Déterminer la pente de la tangente à C au point $(4,3)$.

Question 4

Soit C la courbe définie par l'équation

$$(x^3-1)y^2 = 1.$$

a) Déterminer la pente de la tangente en un point (x,y) sur la courbe au point à l'aide de la dérivation implicite.

b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?

> « Comme y' vaut $6/7$ au point $(2,1)$, la pente de la tangente à C au point $(2,1)$ est $6/7$. »

Expliquer votre réponse.

Question 5

Démontrer que si f est dérivable, alors

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$$

à l'aide de la définition de la dérivée et des propriétés des limites (sans utiliser la règle de dérivation en chaîne).

Solutions

Question 1

a) $f'(x) = -\dfrac{100000}{x^{101}} - 2\pi^2 x - \dfrac{3}{100}\dfrac{1}{x^{103/100}} - \dfrac{100\pi^{100}}{x^{101}}$

b) $4(1+2x)\sqrt[3]{1-x^2} - \dfrac{2x(1+2x)^2}{3(1-x^2)^{2/3}}$

c) $\dfrac{6(3x-2)(x-1)\sqrt{x} - (3x-2)^2\left(\sqrt{x} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}}\right)}{x(x-1)^2}$

d) $8\left(2x^2-3\right)(x+1)^3 x + 3\left(2x^2-3\right)^2(x+1)^2$

e) $\dfrac{1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+1\right)^{\frac{3}{2}}}$

f) $-\dfrac{14(x+1)^6}{(x-1)^8}$

Question 2

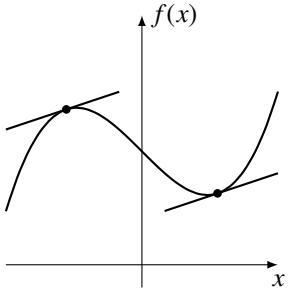
a) La pente de la droite donnée est $-\frac{26}{27}$. On veut donc les points du graphe de f tels que $f'(x) = -\frac{26}{27}$. En dérivant, on trouve que $f'(x) = 3x^2 - 1$. On doit donc résoudre

$$3x^2 - 1 = -\frac{26}{27}.$$

En isolant, on trouve que

$$x = \pm\frac{1}{9}.$$

b) Voici le graphe d'une fonction qui a deux solutions au problème.



Question 3

On fait l'hypothèse que $y = f(x)$. En dérivant chaque membre de l'égalité $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 3$ par rapport à x, on obtient

$$\frac{x}{2} - \frac{2yy'}{9} = 0.$$

En isolant y', on obtient que $\dfrac{9x}{4y}$. Au point $(4,3)$, $y' = \frac{9(4)}{4(3)} = 3$.

Question 4

a) On dérive chaque membre de l'équation $(x^3-1)y^2 = 1$ pour obtenir

$$3x^2y^2 + 2(x^3-1)yy' = 0.$$

En isolant y', on trouve que $y' = -\frac{3x^2y}{2(x^3-1)}$.

b) Même si on peut évaluer y' au point $(2,1)$, la valeur obtenue n'est pas la pente de la tangente à C car le point $(2,1)$ n'est pas sur la courbe C : en substituant dans l'équation qui définit C, on trouve

$$(2^3-1)1^1 \neq 1.$$

L'expression obtenue pour y' est valable uniquement pour les (x,y) qui satisfont l'équation définissant C.

Question 5

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{f(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}\right)\frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}\right)\frac{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}}\frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h) - f(x)\right)\frac{1}{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}}\frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)
\end{aligned}$$