Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Calcul différentiel — 201-NYA — Automne 2017

Examen formatif 1

Calculatrices et documentation interdites. Justifier les réponses.

Question 1
Répondre aux questions suivantes. Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.

a) Si $f(x)$ est continue sur $[b,c]$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

pour toute valeur de a telle que $b < a < c$.

b) Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$, alors $f(x)$ est continue en $x = a$.

Question 2
Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-2)^2(3x-2)^{1/6}}$

Question 3
Quatre des propriétés de base pour l'évaluation de limites sont les suivantes :

(AL1) $\lim_{x\to a} C = C$ (C = constante)
(AL2) $\lim_{x\to a} x = a$
(AL3) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, si les deux limites du membre de droite existent.
(AL4) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$, si les deux limites du membre de droite existent.

Évaluer la limite

$$\lim_{x\to 2} x^2 + 2x$$

en n'utilisant que les propriétés (AL1) à (AL4) et en disant à chaque étape quelle propriété est utilisée.

Question 4
Évaluer les limites suivantes, si elles existent.

a) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^6+2x^5-3x^3-4x^2+3x-2}$

b) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x^2+25}$

c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3}$

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\frac{1}{16}-\frac{1}{x^2}}{(x+1)^2-25}$

e) $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(x^2\right)$

Question 5
Donner l'esquisse d'une fonction f qui satisfait toutes les conditions suivantes (Il n'est pas nécessaire de justifier).

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 4$	$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$
$-1 \notin \mathrm{Dom}(f)$	$f(1) = 3$
$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 2} f(x) \nexists$

Question 6
Soit f la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x+1} & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } x = -1, \\ x+1 & \text{si } -1 < x \le 2, \\ 3 & \text{si } 2 < x < 3, \\ x^2-4 & \text{si } x \ge 3. \end{cases}.$$

a) Déterminer si f est continue en $x = -1$.

b) Déterminer si f est continue en $x = 2$.

c) Est-ce que f est continue sur l'intervalle $[-1,2]$?

Question 7

a) Expliquer en vos mots comment on défini la pente de la tangente à une fonction et faire une esquisse pour illustrer votre explication.

b) Montrer que $\mathrm{TVI}_1(f) = -\frac{1}{2}$ pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2x}$.

c) À l'aide du résultat précédent, déterminer l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction au point $(1, f(1))$.

Solutions

Question 1

a) Vrai. Cela découle directement de la continuité sur un intervalle.

b) Faux. La fonction n'est pas nécessairement définie en $x = a$, ce qui est nécessaire pour que la fonction soit continue en $x = a$.

Question 2

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-2x+1}\text{def} &\iff x^2-2x+1 \geq 0 \\ &\iff (x-1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Comme $(x-1)^2$ est toujours positif ou nul, la fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.

b)

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{(x-2)^2(3x-2)^{1/6}} \text{ def } &\iff (x-2)^2(3x-2)^{1/6} \neq 0 \\ &\iff (x-2) \neq 0 \text{ et } (3x-2)^{1/6} \neq 0 \\ &\iff x \neq 2 \text{ et } (3x-2) \neq 0 \\ &\iff x \neq 2 \text{ et } x \neq 2/3\end{aligned}$$

$(3x-2)^{1/6} = \sqrt[6]{3x-2}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{3x-2} \text{ def } &\iff 3x-2 \geq 0 \\ &\iff 3x \geq 2 \\ &\iff x \geq 2/3\end{aligned}$$

En combinant les conditions obtenues, on obtient :

$\mathrm{dom}(f) =]2/3, \infty[\setminus\{2\}$

Question 3

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} x^2+2x &= \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 2x \quad (AL3) \\ &= \left(\lim_{x\to 2} x\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right) + \left(\lim_{x\to 2} 2\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right) \quad (AL4) \text{ 2 fois} \\ &= (2)(2)+(2)(2) \quad (AL2) \text{ et } (AL1)\end{aligned}$$

Question 4

a) C'est une forme « $\frac{0}{0}$ ». Factoriser $(x+2)$ au numérateur et au dénominateur. Numérateur $x^2-4 = (x+2)(x+2)$. Dénominateur (en divisant) : $x^6+2x^5-3x^3-4x^2+3x-2 = (x+2)(x^5-3x^2+2x-1)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^6+2x^5-3x^3-4x^2+3x-2} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^5-3x^2+2x-1)} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)}{(x^5-3x^2+2x-1)} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{((-2)-2)}{((-2)^5-3(-2)^2+2(-2)-1)} \\ &= \frac{4}{49}\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x^2+25} = \dfrac{0}{50} = 0$ (On peut évaluer directement, ce n'est pas une forme « $\frac{0}{0}$ »

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3} &= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3}\,\frac{\sqrt{x^2+16}+5}{\sqrt{x^2+16}+5} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{x^2+16-25}{x-3}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{1}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{x^2}}{(x+1)^2-25} &= \lim_{x\to 4} \frac{\left(\frac{x^2-16}{16x^2}\right)}{((x+1)-5)((x+1)+5)} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{\left(\frac{(x-4)(x+4)}{16x^2}\right)}{(x-4)(x+6)} \\ &= \lim_{x\to 4} \left(\frac{(x-4)(x+4)}{16x^2}\right)\frac{1}{(x-4)(x+6)} \\ &= \lim_{x\to 4} \left(\frac{(x+4)}{16x^2}\right)\frac{1}{(x+6)} \\ &= \frac{1}{320}\end{aligned}$$

(ind. Simplifier le plus possible dans les calculs au lieu de multiplier les facteurs ensembles.)

e)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(x^2\right) &= 0^2\cos(0^2) \\ &= 0\cos(0) \\ &= 0(1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Question 5

Il y a plusieurs solutions possibles.

Question 6

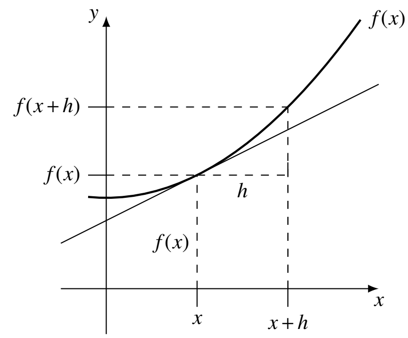
a) La fonction f n'est par continue en $x = -1$: prendre la limite à gauche (attention, c'est un cas « 0/0 ») et à droite quand $x \to -1$ pour montrer que $\lim_{x\to -1} f(x)$ n'existe pas. La fonction n'est donc pas continue en $x = -1$.

b) La fonction f est continue en $x = 2$: prendre la limite à gauche et à droite quand $x \to 2$ pour montrer que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$. Comme on a aussi que $f(2) = 3$, la fonction est continue en $x = 2$.

c) Non, car elle n'est pas continue en $x = -1$; pour être continue sur $[-1, 2]$, f doit être continue en chaque $x \in [-1, 2]$.

Question 7

a) Un graphique possible pour illustrer la définition.



b)

$$\begin{aligned}\mathrm{TVI}_1(f) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2(1+h)}-\frac{1}{2}}{h} \quad „\frac{0}{0}“ \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(1+h)}{2(1+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(1+h)}{2(1+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h)}{2(1+h)}\,\frac{1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1)}{2(1+h)} \\ &= \frac{-1}{2(1+(0))} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

c) Comme $f'(1)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(1, f(1))$, on doit avoir que $y = f'(1)x + b$. En utilisant le point $(1, f(1))$, on doit avoir que $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1) + b$, ce qui implique que $b = 1$. L'équation de la droite est donc

$$y = -\frac{1}{2}x + 1.$$