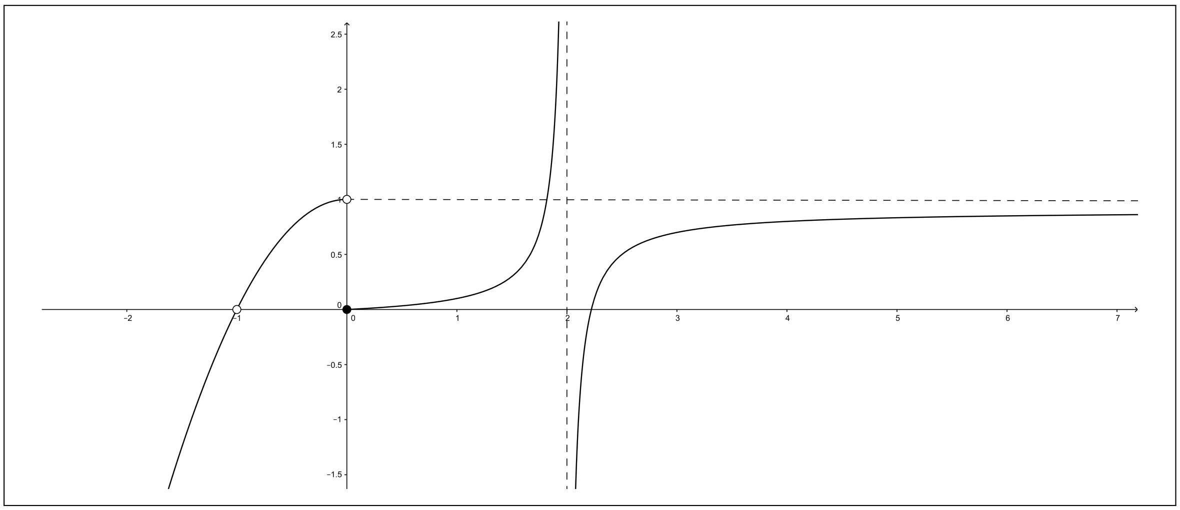
Examen 1 (formatif)

- Aucune calculatrice ni documentation ne sont permises.
- Lisez attentivement chaque question. Utilisez des raisonnements clairs et précis.
- Laissez des traces de vos démarches et indiquez clairement la solution de chaque problème.

Problème 1 (9 points)

À partir du graphe suivant, trouver :



a) $f(-1)$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

e) $f(0)$

f) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Problème 2 (9 points)

a) Factoriser la fonction polynomiale $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 8x$ en facteurs linéaires et donner ses zéros.

b) Décrire le domaine de la fonction $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{f(x)} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x^3-6x^2-8x}$.

c) Est-ce que $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x^3-6x^2-8x}$ existe ? Justifier.

Problème 3 (6 points)

La limite

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x-2\sqrt{x})}{-x^3+10x^2-32x+32}$$

a la forme indéterminée 0/0. Utiliser les deux techniques vues en classe pour lever cette indétermination et trouver la valeur réelle de la limite.

Problème 4 (8 points)

Trouver toutes les asymptotes (verticales et horizontales) de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+2x} & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Problème 5 (8 points)

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -3 \text{ ou } -3 < x < -1 \\ 1 & \text{si } x = -3 \text{ ou } x \geq 4 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 3-x & \text{si } 2 < x < 4. \end{cases}$$

a) Trouver et classifier tous les points de discontinuité de f. (Il est utile de faire une esquisse du graphe de f.)

b) Trouver un nombre b tel que f est continue sur l'intervalle $[-1, b[$ mais *pas* sur l'intervalle $[-1, b]$.

Problème 6 (6 points) Trouver des constantes a, b faisant en sorte que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - 2 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

soit continue partout sur $\mathbb{R}$.

Problème 7 (4 points)

a) Invoquer le théorème des valeurs intermédiaires, ou l'un de ses corollaires, pour justifier l'assertion suivante : « Le polynôme $\sqrt{101}x^{2016} + \pi x$ possède au moins deux racines distinctes ».

b) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. On note que $f(0) = -1$ et $f(2) = 1$ sont de signes opposés. Peut-on invoquer le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure que f possède un zéro dans l'intervalle $[0, 2]$? Justifier.

Réponses

1 (a) $\nexists$ (b) 0 (c) 1 (d) 0 (e) 0 (f) ∞ (g) $-\infty$ (h) 1 (i) $-\infty$

2 (a) $f(x) = 2x(x+1)(x-4)$.
Les zéros sont $x = -1, 0, 4$.

(b) Les x sous la racine doivent satisfaire $x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff |x| \geq \sqrt{1} = 1$. Ceci équivaut à $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. Par le numéro précédent, les divisions par 0 sont en $x = -1, 0, 4$. Donc $D_g = (-\infty, -1) \cup [1, \infty) \setminus \{4\}$.

(c) Par le numéro précédent, g n'existe pas en -1 ni à droite de -1, donc la limite n'existe pas. De manière équivalente, on a que $\sqrt{(-1^+)^2 - 1} = \sqrt{((-1^+) - 1)((-1^+) + 1)} = \sqrt{-2 \cdot 0^+} = \sqrt{0^-}$, ce qui n'existe pas.

3 La division longue du polynôme du bas par $x-4$ donne un quotient de $-x^2+6x-8 = -(x-2)(x-4)$. En simplifiant un facteur $(x-4)$ en haut et en bas et en multipliant par le conjugué $(x+2\sqrt{x})$ de l'expression avec la racine, on trouve $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{-(x-2)(x-4)(x+2\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{x(x-4)}{-(x-2)(x-4)(x+2\sqrt{x})} = -1/4$.

4 Les seules AV possibles sont en $x = -2$ et $x = 1$ (divisions par 0 dans le domaine). On trouve $\lim_{x\to -2^\pm} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, d'où $x = -2, 1$ sont les AV. On a également $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$, d'où $y = -1, 0$ sont les AH.

5 (a) Une discontinuité non-essentielle en $x = -3$; trois discontinuités essentielles en $x = -1, 1, 4$.

(b) $b = 1$.

6 On trouve $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$ et $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$. L'unique droite qui connecte ces deux points a une pente de $a = (2-(-2))/(2-0) = 2$ et une ordonnée à l'origine de $b = -2$.

7 (a) Ce polynôme se factorise en $x(\sqrt{101}x^{2015} + \pi)$. Il admet donc une racine $x = 0$ et une autre qui provient du théorème des valeurs intermédiaires appliqué au polynôme de degré impair $\sqrt{101}x^{2015} + \pi$, qui change forcément de signe.

(b) Le raisonnement est invalide puisque f n'est pas continue en $x = 1 \in [0, 2]$.